1 Definice

1.1 Neoddělitelnost

Množiny A, B jsou **rekurzivně neoddělitelné**, neexistuje-li rekurzivní M, aby $A \subseteq M \wedge B \cap M = \emptyset$

Definiční obor ČRF s kódem x pojmenujeme $W_x = \{y : \Psi(x, y) \downarrow\}$

Množiny A, B jsou **efektivně neoddělitelné**, existuje-li ČRF f:

$$(A \subseteq W_x \wedge B \subseteq W_y \wedge W_x \cap W_y = \emptyset) \Rightarrow f(x, y) \downarrow \wedge (f(x, y) \notin W_x \cup W_y)$$

Efektivně neoddělitelné množiny jsou rekurzivně neoddělitelné.
Důkaz: Jinak $W_x = M$.

1.2 Zajímavé teorie

Axiomatizovatelná teorie T: Množina formulí dokazatelných v T je rekurzivně spočetná

Teorie **základní aritmetické síly:** přirozená čísla, sčítání a násobení, konečně mnoho axiomů (třeba Peanova aritmetika)

XXX: Peanova aritmetika lze definovat jen logikou druhého řádu nebo nekonečně mnoha axiomy — vadí to?

Každá ČRF je reprezentovatelná v teorii ZAS.
Důkaz: Rozborem případů?

Dokazatelnost v ZAS je reprezentovatelná pomocí ČRF.
Důkaz: Naprogramuji axiomy a modus ponens?

2 Gödelovy věty

Mějme bezespornou teorii ZAS T.

Předvěta: Množina formulí T dokazatelných v T není rekurzivní

První věta: Je-li T axiomatizovatelná, existuje pravdivá formule nerozhodnutelná v T.

Druhá věta: Říká-li o sobě T, že je konzistentní, je nekonzistentní.

Neboli netriviální teorie nemohou být zároveň konzistentní a úplné.

3 Důkaz první Gödelovy věty

Chceme dokázat, že množina dokazatelných a vyvratitelných formulí je **efektivně neoddělitelná dvojice**.

3.1 Neoddělitelnost množin popsaných predikáty

Lze dokázat, že existuje nějaká dvojice efektivně neoddělitelných RSM.

Vezměme libovolnou dvojici efektivně neoddělitelných RSM A, B a popišme je logickým predikátem G resp. $\neg G$:

$$x \in A \Rightarrow \vdash_T G(x)$$

$$x \in B \Rightarrow \vdash_T \neg G(x)$$

(Pro $x \notin A \cup B$ je G nedokazatelná, odpovídá programu, který nedoběhne. Charakteristické funkce A, B jsou reprezentovatelné v teorii T, tedy je můžeme převést na dokazatelnost predikátu.)

Zaveďme nové množiny A', B' dokazatelných výroků G a $\neg G$:

$$A' = \{x : \vdash_T G(x)\}$$

$$B' = \{x : \vdash_T \neg G(x)\}$$

Lemma 1: $A' \cap B' = \emptyset$ (z bezespornosti)

Důkaz předvěty: $A \subseteq A'$, $B \subseteq B'$; A', B' nejsou rekurzivní, jinak by separovaly A, B. QED.

Lemma 2: Z množiny dokazatelných a vyvratitelných instancí G lze vygenerovat prvek ležící mimo ně.
Důkaz: Z předpokladu axiomatizovatelnosti jsou A', B' rekurzivně spočetné, tedy odpovídají nějakým W množinám a z předpokladu efektivní neoddělitelnosti A, B můžeme pomocí jejich funkce f vygenerovat bod mimo A', B'.

Lemma 3: Instance G ležící mimo A', B' je nedokazatelná v T.
Důkaz: Kdyby byla dokazatelná v T, byla by v A' nebo B' z jejich definice.

Tedy dostaneme instanci G, která je buď pravdivá, ale nedokazatelná, nebo nepravdivá, ale nevyvratitelná (pak stačí prohodit A, B).

XXX: K čemu by nám byly dobré produktivní množiny?!