Definice:

Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$. Pak **derivací funkce** f **v bodě** a rozumíme

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(pokud existuje).

Derivací zprava a zleva rozumíme

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0_-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Poznámky:

(i)

$$f'(a) \begin{cases} \text{existuje} & \begin{cases} \text{vlastní} \\ \text{nevlastní} & \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje} \end{cases}$$

(ii) $f'(a)$ existuje $\Longleftrightarrow$ existuje $f'_+(a), f'_-(a) \wedge f'_+(a) = f'_-(a)$

(iii) $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $\langle$cvičení$\rangle$

Příklady:

(i) $f(x) \equiv a$

$$f'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a-a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

(ii) $f(x) = x^n$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^n + nha^{n-1} + \binom{n}{2} h^2 a^{n-2} + \cdots + h^n - a^n}{h}$$
$$= na^{n-1} + \lim_{h \to 0} \left(\binom{n}{2} ha^{n-2} + \cdots h^{n-1} \right) = na^{n-1}$$

(iii) $f(x) = e^x$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{1} = e^a$$

(iv) $f(x) = \sin x$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin a \cdot \cos h + \cos a \cdot \sin h - \sin a}{h} 1$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin a \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos a \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} = \cos a$$

(v) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(a) = -\sin a$ ⟨cvičení⟩

(vi) $f(x) = |x|$

$$f'(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

$f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1 \Rightarrow f'(0)$ neexistuje.

(vii) $f(x) = \operatorname{sign} x$

$$f'(a) = 0,\ a \neq 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sign}(0+h) - \operatorname{sign} 0}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sign}(0+h) - \operatorname{sign} 0}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{-1}{h} = +\infty$$

$$\operatorname{sign}'(0) = +\infty$$

VĚTA 16 (vztah derivace a spojitosti):

Má-li funkce f v bodě a **vlastní** derivaci, pak je f spojitá v bodě a.

DŮKAZ:

$$\lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a} \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{f'(a)\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{(x - a)}_{\to 0} = 0$$

Q.E.D.

VĚTA 17 (aritmetika derivací):

Nechť existují $f'(a)$, $g'(a)$.

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, je-li pravá strana definovaná.

(ii) Je-li g spojitá v a, pak $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, je-li pravá strana definovaná.

(iii) Je-li g spojitá v a, $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}.$$

DŮKAZ:

(i)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+g) + g(a+h) - (f(a) + g(a))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) + g'(a)$$

(ii)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{g(a+h)}_{\substack{\to g(a) \\ \textit{(spojitost!)}}} \underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\to f'(a)} + f(a) \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$= g(a)f'(a) + f(a)g'(a)$$

(iii)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{g(a+h)g(a)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(a+h)}{g(a+h)g(a)h}$$

$$= \frac{g(a)f'(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}$$

(Opět jsme použili spojitost, tedy $\lim_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$.)

VĚTA 18 (o derivaci složené funkce):

Nechť f má derivaci v bodě y_0, g v bodě x_0, g je spojitá v x_0 a $y_0 = g(x_0)$. Potom $(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$, je-li výraz na pravé straně definován (tedy se nejedná o $0 \cdot \infty$).

DŮKAZ:

Idea:

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Ale co když $g(x) - g(x_0) = 0$?

(i) Nechť $f'(y_0) \in \mathbb{R}$:
Definujme funkci

$$F(y) := \begin{cases} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} & \text{pokud } y \neq y_0 \\ f'(y_0) & \text{pokud } y = y_0 \end{cases}$$

F definujeme na nějakém okolí bodu y_0. Potom je F spojitá v bodě y_0.
Víme, že f je definována na nějakém okolí y_0 a g na nějakém okolí x_0. Tvrdím tedy, že

$$\lim_{x\to x_0} F(g(x)) = f'(y_0),$$

neboť

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \wedge \lim_{y\to g(x_0)} F(y) = F(g(x_0))$$

(to vyhovuje předpokladu 2 věty o spojitosti složené funkce).

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} F(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = F'(y_0)g'(x_0)$$

(dle VOAL, neboť výraz vpravo je definován).

(ii) Nechť $f'(y_0) = \pm\infty$:
Protože $f'(y_0)g'(x_0)$ je definován (dle předpokladu) a $f'(y_0) = \pm\infty$, pak jistě $g'(x_0) \neq 0$. Tedy $\exists\, \mathcal{P}(x_0, \delta)$ takové, že $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \neq 0$, tedy $g(x) \neq g(x_0)$. Tudíž

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Q.E.D.

Příklad:

(i) $(a^x)' = \left(e^{x \log a}\right)' = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a \qquad (a > 0)$

(ii) $(x^x)' = \left(e^{x \log x}\right)' = e^{x \log x} \cdot (x \log x)' = x^x \cdot (1 \log x + x\frac{1}{x}) = x^x(\log x + 1) \qquad (x > 0)$

VĚTA 19 (o derivaci inverzní funkce):

Nechť f je spojitá a ryze monotónní na intervalu I, a buď vnitřní bod I. Označíme $b = f(a)$.

(i) Je-li $f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

(ii) Je-li $f'(a) = 0$ (např. v nule pro x^3) a f je rostoucí (klesající):

$$(f^{-1})'(b) = +\infty \ (-\infty)$$

DŮKAZ:

Idea:

$$f^{-1}(y) = x, \ y = f(x)$$

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

Víme: f^{-1} je definovaná, spojitá a ryze monotónní na $f(I)$, b je vnitřním bodem itnervalu $f(I)$, $a = f^{-1}(b)$.

(i) $(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$
Definujme funkci

$$F(y) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{pokud } x \neq a \\ f'(a) & \text{pokud } x = a \end{cases}$$

Tak $\lim_{x \to a} F(x) = f'(a)$ a zároveň je F spojitá v a (bude zastupovat vnější funkci).
Dále $\lim_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$ (vnitřní funkce), neboť f^{-1} je spojitá na $f(I)$. Tedy dle věty o spojitosti složené funkce:

$$\lim_{y \to b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = f'(a)$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{y \to b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} \\ &= \lim_{y \to b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} \\ &= \frac{1}{\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}} \end{aligned}$$

(ii) Bez újmy na obecnosti nechť je f rostoucí, $f'(a) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \Rightarrow y > b \Rightarrow f^{-1}(y) > f^{-1}(b) \\ x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \Rightarrow y < b \Rightarrow f^{-1}(y) < f^{-1}(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = +\infty$$

Q.E.D.

Poznámka:

Využili jsme větu: $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, $g(x) > 0$ na $\mathcal{P}(a, \delta)$, pak $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = +\infty$ (viz V2.8-a Heine).

Příklady:

(i) $(e^x)' = e^x$, $(\log x)' = \frac{1}{x}$, neboť $\exp^{-1} = \log$.

$$e^x = y,\ x = \log y$$

$$(e^x)' = \frac{1}{(\log y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

$$(\log y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

(ii) $(\arcsin x)'$

$$y = \arcsin x,\ x = \sin y$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y},\ y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$(\arcsin x)' \overset{\text{V.19-}}{=} \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ x \in (-1, 1)$$

(iii) $(\operatorname{arctg} x)'$

$$y = \operatorname{arctg} x,\ x = \operatorname{tg} y$$

$$1 + \overset{2}{\operatorname{tg}} y = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' \overset{\text{V.19-}}{=} \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

(iv) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1, 1)$

(v) $(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$

VĚTA 20 (nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$. Nechť f má v bodě $a \in M$ lokální extrém. Potom buď $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$ (tedy má funkce v tomto bodě tečnu rovnoběžnou s osou x).

DŮKAZ:

Sporem: Nechť $f'(a)$ existuje, leč $f'(a) \neq 0$.
Z existence derivace plyne existence okolí $\mathcal{U}(a,\delta) \subseteq M$. Bez újmy na obecnosti nechť $f'(a) > 0$. Potom $\exists\, \xi > 0$ takové, že $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}(a,\xi)$.
Tedy, je-li $x < a$, pak $x - a < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^-(a,\xi)$.
Naopak, je-li $x > a$, pak $x - a > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^+(a,\xi)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) < f(a),\ x \in \mathcal{P}^-(a,\xi) \\ f(x) > f(a),\ x \in \mathcal{P}^+(a,\xi) \end{array}\right\} \Rightarrow\ f \text{ nemá lokální extrém v } a$$

$\not\sharp$ *Spor*

Typická úloha

f spojitá na $[a,b]$, najděte maximum (minimum) funkce na $[a,b]$.
Postup:

1. f spojitá na $[a,b] \Rightarrow f$ nabývá maxima, minima

2. V.20- $\Rightarrow$ tyto extrémy mohou být pouze v bodech, kde:

- **(i)** $f'(x_0) = 0$
- **(ii)** $f'(x_0)$ neexistuje
- **(iii)** $x_0 = a$, $x_0 = b$

Příklad:

Tzv. "bačův problém" — bača má k dispozici 100m plotu a chce si s ním oplotit co největší pastvinu. Definuje si tedy hodnotící funkci pastviny

$$f(x) = 50x - x^2,\ x \in [0,50]$$

a derivací hledá maximum:

$$f'(x) \text{ existuje pro } \forall x \in (0,50)$$

$$f'(x) = 50 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 25$$

Tedy máme 3 kandidáty na extrémy:

$$x = 25 \Rightarrow f(x) = 625\,\mathrm{m}^2$$
$$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$
$$x = 50 \Rightarrow f(x) = 0$$