Konvexní a konkávní funkce

Definice:

Nechť f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Označíme

$$T_a = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2$ leží nad (pod) **tečnou** T_a, jestliže $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$ (resp. $f(x) < \ldots$).

Definice:

Nechť f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi**, jestliže $\exists\, \delta$ tak, že:

Buď: $\forall x \in (a - \delta, a) : [x, f(x)]$ leží nad T_a a $\forall x \in (a, a + \delta) : [x, f(x)]$ leží pod T_a
nebo: $\forall x \in (a - \delta, a) : [x, f(x)]$ leží pod T_a a $\forall x \in (a, a + \delta) : [x, f(x)]$ leží nad T_a.

VĚTA 27 (nutná podmínka existence inflexe):

Jestliže $f''(a) \neq 0$, pak f nemá v bodě a inflexi.

DŮKAZ:

Bez újmy na obecnosti nechť $f''(a) > 0$. Potom

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0$$

Tedy $\exists\, \delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (a, a + \delta) : f'(x) > f'(a) \ \wedge\ \forall x \in (a - \delta, a) : f'(x) < f'(a)$$

Zvolme $y \in (a, a + \delta)$. Pak f je spojitá na $[a, y]$ a $\exists\, f'$ na (a, y). Tedy dle pana Lagrange $\exists\, \xi \in (a, y)$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{y - a} = f'(\xi) > f'(a)$$

$$f(y) > f(a) + f'(a)(y - a) \qquad \forall y \in (a, a + \delta)$$

Tedy jsme nad T_a.

Analogicky:

Zvolme $z \in (a - \delta, a)$. Pak f je spojitá na $[z, a]$ a $\exists\, f'$ na (z, a). Tedy dle pana Lagrange $\exists\, \psi \in (z, a)$:

$$\frac{f(a) - f(z)}{a - z} = f'(\psi) < f'(a)$$

$$f(z) < f(a) + f'(a)(z - a) \qquad \forall z \in (a - \delta, a)$$

Tedy není inflexe v a!

Poznámky:

(i) $f''(a) = 0 \not\Rightarrow f$ má v bodě a inflexi!
Viz $f(x) = x^4,\ a = 0.\ f'(x) = 4x^3,\ f''(x) = 12x^2,\ f''(0) = 0.$

(ii) Jestliže $f''(a)$ neexistuje, pak f může a nemusí mít inflexi v bodě a.
Viz $f(x) = x|x|.\ f''(0)$ neexistuje, ale f má v bodě nula inflexní bod.

VĚTA 28 (postačující podmínka pro existenci inflexe):

Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b). Nechť $z \in (a, b)$. Nechť pro $\forall x \in (a, z)$ platí $f''(x) > 0$ a pro $\forall x \in (z, b)$ platí $f''(x) < 0$ (nebo naopak). Pak z je bod inflexe funkce f.

DŮKAZ:

Nechť $f'' > 0$ na (a, z), $f'' < 0$ na (z, b). Potom dle V.26- je f' rostoucí na (a, z) a klesající na (z, b).

$$\exists \xi \in (z, b) : \ \frac{f(b) - f(z)}{b - z} = f'(\xi) < f'(z)$$

$$\Rightarrow f(b) < f(z) + f'(z)(b - z)$$

(pod tečnou)

$$\exists \eta \in (a, z) : \ \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(\eta) < f'(z)$$

$$\Rightarrow f(a) > f(z) + f'(z)(a - z)$$

(nad tečnou)
Totéž platí pro každý bod $x \in (z, b)$ a $y \in (a, z)$, tedy

$$\left. \begin{aligned} f(x) < f(z) + f'(z)(x - z) \\ f(y) > f(z) + f'(z)(y - z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ má v bodě } z \text{ inflexi.}$$

Q.E.D.

Příklad:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1 + x^2)^2} 2x$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2} \begin{cases} > 0 & \text{pro } x < 0 \\ < 0 & \text{pro } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ má v 0 inflexi}$$

$$f''(0) \text{ existuje } \Rightarrow f''(0) = 0$$

T-O-D-O: TADY TOHO **HODNĚ** CHYBÍ! (DEFINICE KONK/KONV, TŘI VĚTY, ASYMPTOTY, . . .)

Asymptoty

(Zhruba.)

$$\lim_{x\to\infty} f(x)/x = a$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b$$

Pokud jsou obě limity konečné, asymptota je

$$y = ax + b$$

(jinak asymptota není).

(Ekviv. druhá asymptota pro $-\infty$.)