L'Hospital a přátelé

Idea

Počítat limity přes derivace, když jsou tak derivace definované.

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \stackrel{?}{=} \frac{\lim\ldots}{\lim\ldots} \stackrel{?}{=} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

VĚTA 21 (Rolleova):

Nechť f je spojitá na $[a,b]$, $a<b$ a nechť existuje $f'(x)$ pro každé $x \in (a,b)$. Nechť $f(a)=f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že $f'(\xi)=0$.

DŮKAZ:

(i) Nechť $f(x)=f(a)$ pro $\forall x \in [a,b]$, pak $f'(x)=0$ pro $\forall x \in (a,b)$.

(ii) Nechť $\exists\, x \in (a,b),\ f(x) \neq f(a)$, tedy bez újmy na obecnosti $f(x) > f(a)$. Protože f je spojitá na $[a,b]$, existuje lokální extrém $\xi \in [a,b]$ (největší $f(x)$). Dle předpokladu $f'(\xi)$ musí existovat, tedy podle V.20- je $f'(\xi)=0$.

Q.E.D.

VĚTA 22 (Lagrangeova věta o střední hodnotě):

Nechť f je spojitá na $[a,b]$, $a<b$ a nechť existuje $f'(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$. Potom $\exists\, \xi \in (a,b)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(Tedy existuje v nějakém bodě derivace (tečna) rovnoběžná s nakloněnou podstavou (spojnicí krajních bodů). **T-O-D-O:** Obrázek.)

DŮKAZ:

Definujme

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$$

(na základě divoké analyticko-geometrické úvahy).

Potom $F(a)=0 \ \wedge\ F(b)=0$. Pak podle Rolleovy věty $\exists\, \xi \in (a,b) : F'(\xi)=0$. Tedy

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

a tudíž

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Q.E.D.

VĚTA 23 (Cauchyova věta o střední hodnotě):

Nechť f,g jsou spojité na $[a,b]$, $a<b$ a nechť $\exists\, f'(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$ a $\exists\, g'(x)$ vlastní a nenulová pro $\forall x \in (a,b)$. Potom $\exists\, \xi \in (a,b)$ takové, že

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

DŮKAZ:

$g(a) \neq g(b)$, neboť jinak by dle Rolleovy věty existovalo $\xi \in (a, b) : g'(\xi) = 0$, což by byl spor. Definujeme

$$H(x) := (f(x) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(x) - f(a)).$$

Potom $H(a) = H(b) = 0$, H je spojitá na $[a, b]$, existuje H' na $[a, b]$.
Tedy dle Rolleovy věty $\exists\, \xi \in (a, b)$ takové, že

$$0 = H'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)) - g'(\xi)(f(b) - f(a)) \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

(neboť $g'(\xi) \neq 0$, $g(b) - g(a) \neq 0$).
Q.E.D.

VĚTA 24 (L'Hospitalovo pravidlo):

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a funkce f, g jsou definovány na nějakém $\mathcal{P}^+(a, \delta)$.

(i) Nechť $\lim_{x \to a_+} f(x) = \lim_{a \to a_+} g(x) = 0$ a existuje

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) Nechť $\lim_{x \to a_+} |g(x)| = +\infty$ a existuje

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Příklad:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

DŮKAZ:

(i) Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}.$$

Potom

$$\exists\, \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{P}^+(a, \delta) :\ \exists\, f'(x) \in \mathbb{R},\ g'(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

"Dodefinuji" funkce f a g v bodě A: $f(a) = g(a) = 0$. Nyní nechť $x \in \mathcal{P}^+(a, \delta)$. (Obrázek.) Potom f, g jsou spojité na $[a, x]$, neboť obě mají vlastní derivaci na celém $\mathcal{P}^+(a, \delta)$.

Tedy jsou splněny předpoklady V.23- (na intervalu $[a, x]$!) a proto platí, že $\exists \xi \in (a, x)$ takové, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

(ξ závisí na x! Značíme $\xi = \xi(x)$.)
Zvolme $\varepsilon > 0$. Víme, že existuje $\omega > 0$ takové, že

$$\forall y \in \mathcal{P}^+(a, \omega) : \frac{f'(y)}{g'(y)} \in \mathcal{U}(A, \varepsilon).$$

Pro $x \in \mathcal{P}^+(a, \delta) \cap \mathcal{P}^+(a, \omega)$ najdeme $\xi = \xi(x)$ podle receptu na začátku důkazu. Potom

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \mathcal{U}(A, \varepsilon).$$

Víme ale, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

tedy také

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathcal{U}(A, \varepsilon).$$

Takže

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = A = \lim_{x \to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(i) $a = -\infty$
Převedeme na předchozí případ pomocí substituce

$$F(y) = f\left(-\frac{1}{y}\right), F'(y) = f'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y}$$
$$G(y) = g\left(-\frac{1}{y}\right), G'(y) = g'\left(-\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y}$$

$$\implies \underbrace{\lim_{y \to 0_+} \frac{F(y)}{G(y)}}_{=\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{y \to 0_+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{y'(x)}$$

(ii) Technická záležitost, považujeme za dokázané (nezkouší se).

Poznámky, příklady, varování:

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3x + 1}{2x + 2} \neq \lim_{x \to 0} \frac{3}{2} = \frac{2}{2}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x}}{x^2}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x + \sin x} = +\infty$, ale $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{1 + \cos x}$ neexistuje.

(iv) L'Hospital vhodný např. pro

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}, \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x}{2}^2}{x^4}, \ldots$$

(v) $\lim\limits_{x\to 1_-}(2-x)^{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

$$e^{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\log(2-x)}{1-x}(1-x)} = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}x)(1-x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}(1-x)$$

$$\lim_{x\to 1_-}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1_-}\frac{-1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\frac{2}{\pi} \to \frac{2}{\pi}$$

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3^n} \overset{\text{Heine + L'H ``}\frac{\infty}{\infty}\text{''}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{3^x\log 3} \overset{\text{L'H ``}\frac{\infty}{\infty}\text{''}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{3^x(\log 3)^2} = 0$

(vii) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x} \overset{\text{L'H ``}\frac{\infty}{\infty}\text{''}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$