Limita funkce

Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ **limitu** $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{P}(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon)$$

Značíme: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Poznámky:

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = A$, pak je funkce definována na nějakém prstencovém okolí bodu a. V bodě a funkce f může a nemusí být definována. Je-li f definována v a, pak $f(a)$ nemá vliv na limitu $\lim_{x\to a} f(x)$.

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje, existuje nevlastní ($A = \pm\infty$) nebo existuje vlastní ($A \in \mathbb{R}$).

(iii) Limitu počítáme buď ve vlastním bodě ($a \in \mathbb{R}$) nebo v nevlastním bodě ($a = \pm\infty$).

Jiné (ekvivalentní) formulace:

$a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\} \Rightarrow f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$

$a \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$:

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = A \iff \forall K \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0,\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\} \Rightarrow f(x) > K$$

Obecně: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $f(\mathcal{P}(a,\delta)) \subset \mathcal{U}(A,\varepsilon)$

Definice:

Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v a limitu zprava (zleva) rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{P}^+(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon)$$

(Zleva $\mathcal{P}^-$.)
Značíme $\lim\limits_{x\to a\pm} f(x) = A$.

Pozorování:

$a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = A$$

Důkaz: ⟨cvičení⟩

Příklady:

(i)

$$f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0,\infty)$$

$$\lim_{x\to 25} f(x) = 5$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \in [0,\infty) - \{25\} \\ \pi^2/8 & x = 25 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 25} f(x) = 5$$

Důkaz z definice: Dáno $\varepsilon > 0$, chci $\delta > 0$ tak, aby

$$x \in (25-\delta, 25+\delta) - \{25\} \Rightarrow \sqrt{x} \in (5-\varepsilon, 5+\varepsilon)$$

δ volím tak, aby $\sqrt{25+\delta} < 5+\varepsilon \wedge \sqrt{25-\delta} > 5-\varepsilon$

$$\Rightarrow \delta \overset{\text{volím}}{=} \min\{(5+\varepsilon)^2 - 25, 25 - (5-\varepsilon)^2\}$$

(ii) $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$:
Pak $\lim_{x \to a} f(x) = c$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$. Dáno $\varepsilon \Rightarrow \delta$ libovolné.

(iii) $f(x) = \operatorname{sign} x$:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, 0) \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ neexistuje (neboť $\lim_{x \to 0-} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$).

(iv) Dirichletova funkce $D(x) = \operatorname{bool}(x \in Q)$:
Nemá ani jednostrannou limitu v žádném bodě $x \in \mathbb{R}$.

(v) Riemannova funkce:

$$R(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q & x \in \mathbb{Q},\ x = p/q \end{cases}$$

(viz D1).

$$\lim_{x \to a} R(x) = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

(Pro každé ε si najdu oblast, kde z něj nic nevyskočí, a to bude δ.)

Spojitost

Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v $a \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Příklad:

$R(x)$ je spojitá v $\forall x \notin \mathbb{Q}$.

VĚTA 1 (Heineova věta):

Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Nechť f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ ($\mathcal{P}(a, \delta_0)$). Potom jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní:

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující pro $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in D(f)$, $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ a $x_n \neq a$ platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$. (Viz D2)

DŮKAZ:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Víme: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0$: $f(\mathcal{P}(a,\delta)) \subset \mathcal{U}(A,\varepsilon)$
Nechť $\{x_n\}$ splňuje požadavky (ii), tj.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

$$x_n \neq a \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Tedy k $\varepsilon > 0$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 :\ x_n \in \mathcal{U}(a,\delta)$$

(neboť $\lim x_n = a$). Ale

$$x_n \neq a\ \forall n \Rightarrow \exists\, n_0,\ \forall n \geq n_0 :\ x_n \in \mathcal{P}(a,\delta)$$

Tedy

$$f(x_n) \in \mathcal{U}(A,\varepsilon) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Sporem: Předpokládáme, že neplatí (i), ale platí (ii).
Neplatí (i), tedy:

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq A \Longleftrightarrow \exists\,\varepsilon > 0,\ \forall\delta > 0\ \exists\, x \in \mathcal{P}(a,\delta) :\ f(x) \notin \mathcal{U}(A,\varepsilon)$$

Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$. Zkonstruujeme x_n tak, že $x_n \in \mathcal{P}(a,1/n) \cap \mathcal{P}(a,\delta_0)$ a $f(x_n) \notin \mathcal{U}(A,\varepsilon)$. Toto lze udělat, stačí položit $\delta = 1/n$. To provedu pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Nyní máme tedy posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Zřejmě platí:

$$x_n \in D(f) \quad (x_n \in \mathcal{P}(a,\delta_0),\ \forall n \in \mathbb{N})$$

$$x_n \neq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad (x_n \in \mathcal{P}(a,1/n),\ \lim_{n\to\infty} 1/n = 0)$$

Ale $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$, protože jsme si řekli $f(x_n) \notin \mathcal{U}(A,\varepsilon)$.
$\not\sharp$ *Spor*

VĚTA 2 (o jednoznačnosti limity funkce):

Funkce f má v každém bodě nanejvýše jednu limitu.

DŮKAZ:

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A \wedge \lim_{x\to a} f(x) = B$.
Nechť $\{x_n\}$ splňuje $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

$$\overset{\text{Heine}}{\Longrightarrow}\ \lim f(x_n) = A,\ \lim f(x_n) = B \Rightarrow A = B \overset{\text{V.2-}}{\Rightarrow} \text{tvrzení věty.}$$

Q.E.D.

VĚTA 3 (o lokální omezenosti funkce s vlastní limitou):

Nechť f má v $a \in \mathbb{R}$ vlastní limitu. Potom existuje $\delta > 0$ taková, že f je na $\mathcal{P}(a, \delta)$ omezená.

DŮKAZ:

Víme: Pro $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0$ takové, že $f(\mathcal{P}(a, \delta)) \leq \mathcal{U}(a, \varepsilon)$.
Limita je vlastní, $A \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{U}(A, \varepsilon) : (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.
Zvol $\varepsilon = 1$. Pak existuje $\delta > 0$ taková, že:

$$f(\mathcal{P}(a, \delta)) \leq \mathcal{U}(A, 1)$$

$$f(x) \in (A - 1, A + 1) \quad \forall x \in \mathcal{P}(A, \delta)$$

$$\Rightarrow f \text{ je omezená na } \mathcal{P}(a, \delta)$$

Q.E.D.

Poznámka:

VĚTA 4 (o aritmetice limit funkcí):

Nechť $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak:

(i) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B$, je-li výraz vpravo definován.

(ii) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = AB$, je-li výraz vpravo definován.

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = A/B$, je-li výraz vpravo definován.

DŮKAZ:

(i)

Zvol posloupnost $\{x_n\}$, $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Potom dle Heine 1:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

$$\lim_{n \to \infty} g(x_n) = B$$

$$\overset{\text{VOAL}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B$$

a protože je posloupnost libovolná,

$$\overset{\text{Heine 2}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = A + B$$

(ii), (iii) analogicky.
Q.E.D.

VĚTA 5 (o uspořádání a funkčních policajtech):

- **(i)** Nechť $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(a,\delta)$ takové, že pro $\forall x \in \mathcal{P}(a,\delta)$ platí $f(x) > g(x)$.
- **(ii)** Nechť pro $\forall x \in \mathcal{P}(a,\delta)$ platí $f(x) \le g(x)$ a nechť existuje $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} f(x)$. Potom $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$.
- **(iii)** Nechť pro $\forall x \in \mathcal{P}(a,\delta)$ platí $f(x) \le h(x) \le g(x)$ a nechť $\lim f(x) = \lim g(x)$. Potom existuje $\lim h(x)$ a $\lim f(x) = \lim h(x) = \lim g(x)$. ("Policajti.")

DŮKAZ:

- **(i)** Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, $A > B$. Zvolím $\varepsilon > 0$ tak, aby $\mathcal{U}(A,\varepsilon) \cap \mathcal{U}(B,\varepsilon) = \emptyset$ (futrály se nepotkají). K tomuto ε existuje δ taková, že:

$$f(\mathcal{P}(a,\delta)) \subseteq \mathcal{U}(A,\varepsilon),\ g(\mathcal{P}(a,\delta)) \subseteq \mathcal{U}(B,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow f(x) > g(x) \qquad \forall x \in \mathcal{P}(a,\delta)$$

- **(ii)** Skoro totéž.
- **(iii)** Zvolím $\varepsilon > 0$, pak existuje $\delta_0 > 0$ taková, že:

$$f(\mathcal{P}(a,\delta_0)) \subseteq \mathcal{U}(A,\varepsilon),\ g(\mathcal{P}(a,\delta_0)) \subseteq \mathcal{U}(A,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \gamma = \min(\delta,\delta_0):\ h(\mathcal{P}(A,\gamma)) \subseteq \mathcal{U}(A,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} h(x) = A$$

Q.E.D.

Poznámka:

Všechny věty v této části platí i pro jednostranné limity. Např. Heine:

$$\lim_{x\to a_+} f(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_n \in \mathcal{P}(f) \\ x_n \in \mathcal{P}^+(a,\delta) & \text{pro nějaké } \delta > 0 \\ \lim_{n\to\infty} x_n = a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

Příklady:

- **(i)** $\lim\limits_{x\to 0} xD(x) = 0$
- **(ii)** $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$ neexistuje (Heine).
  Stačí zvolit posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \to \inf$, $\lim f(x_n) = \lim \sin(x_n)$. Volíme $x_n = n\pi/2$. $x_n = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots\}$. Limita neexistuje.
- **(iii)** $\lim\limits_{x\to 0_+} \sin(1/x)$
  Zvolím $x_n = 2/(\pi n)$, použijeme Heineho větu.

Spojitá funkce

$a \in \mathbb{R}$, f je **spojitá** v a, právě když:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; f(\mathcal{U}(a, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(f(a), \varepsilon)$$

f je **spojitá zprava** v a, právě když výše uvedené platí pro $x \to a_+$ a $f(\mathcal{U}^+(a, \delta))$.
f je **spojitá zleva** v a, právě když výše uvedené platí pro $x \to a_-$ a $f(\mathcal{U}^-(a, \delta))$.

Důsledek VOALF:

Nechť f a g jsou spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak $f \pm g$ a $f \cdot g$ jsou také spojité v $a \in \mathbb{R}$. A jestliže navíc $g(a) \neq 0$, pak také podíl f/g je spojitý v bodě $a \in \mathbb{R}$.

Příklad:

Neboť $\lim_{x \to a} x = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$, je každá funkce tvaru

$$\mathcal{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + ax + a_0 \qquad (a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$$

spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$. Takovou funkci nazýváme **polynom**.

Složená funkce

$\sin(x^2)$ je funkce složená. Podobné jako skládání zobrazení:

$$x \overset{\text{g}}{\mapsto} g(x) \overset{\text{f}}{\mapsto} f(g(x)) \iff (f \circ g)$$

$(f \circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x))$ — **složená funkce**. f nazýváme **vnější funkce**, g **vnitřní funkce**. Např.:

$$g(x) = x^2, \; f(y) = \sin(y) \Rightarrow (f \circ g)(x) = \sin(x^2)$$

Varování: Skládání zobrazení není komutativní! $(g \circ f)(y) = (\sin y)^2$
Nechť:

$$\lim_{x \to a} g(x) = A$$

$$\lim_{x \to A} f(y) = B \;\; \textit{(Pozor na } x \to A\textit{!)}$$

Platí pak, že $\lim_{x \to a}(f \circ g)(x) = B$? Neplatí!

Příklad:

$$g(x) \equiv 0$$

$$f(x) \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) \equiv 1$$

$$\lim_{x \to 0} (f \circ g)(x) = 1$$

Ale:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

$$\lim_{y \to 0} f(y) = 0$$

(blíží se k 0, ale nikdy tam nedorazí).
$\not\sharp$ *Spor*

Co děláme špatně?

(i) Vnitřní funkce je konstantní.

(ii) Vnější funkce je nespojitá v tomto bodě.

VĚTA 6 (o limitě složené funkce):

Nechť $\lim_{x\to a} g(x) = A$ (vnitřní funkce), $\lim_{y\to A} f(y) = B$ (vnější funkce); $a, A, B \in \mathbb{R}^*$. Nechť navíc platí jeden z předpokladů:

(P1) f je spojitá v bodě A.

(P2) $\exists\, \delta > 0$ taková, že $g(x) \neq A$ pro $\forall x \in \mathcal{P}(a, \delta)$ (tedy se vnitřní funkce "vyhýbá" své limitě).

Potom platí: $\lim\limits_{x\to a} (f \circ g)(x) = B$.

DŮKAZ:

Poznámka:

Proč věta nelze dokázat bez předpokladů? Lžidůkaz:
Ke zvolenému $\varepsilon > 0$ najdu $\psi > 0$ takové, že:

$$f(\mathcal{P}(A, \psi)) \subseteq \mathcal{U}(B, \varepsilon)$$

K $\psi > 0\ \exists\, \mu > 0$ takové, že:

$$g(\mathcal{P}(a, \mu)) \subseteq \mathcal{U}(A, \psi)$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} (f \circ g)(\mathcal{P}(A, \mu)) \subseteq f(\mathcal{U}(A, \psi))$$

Chci tak $\subset \mathcal{U}(B, \varepsilon)$, to ale nejde! Místo $f(\mathcal{U}(A, \psi))$ bychom v tom případě museli použít $f(\mathcal{P}(A, \psi))$.

Možné cesty z nouze:

(i) Už od začátku si vezmu $\mathcal{U}(A, \psi)$ — požaduji spojitost.

(ii) Nebo vnitřní funkci zakáži, aby nabývala své limity — dostanu $\mathcal{P}(A, \psi)$.

Tedy:

(P1) Zvol $\varepsilon > 0$:

$$\exists\, \psi > 0 : f(\mathcal{U}(A, \psi)) \subseteq \mathcal{U}(B, \varepsilon)$$

($\mathcal{U}(A, \psi)$ místo $\mathcal{P}$ si mohu dovolit, neboť je f v bodě A spojitá, tj. $f(A) = B$.)

$$\exists\, \mu : g(\mathcal{P}(a, \mu)) \subseteq \mathcal{U}(A, \psi)$$

$$(f \circ g)(\mathcal{P}(a, \mu)) = f(g(\mathcal{P}(a, \mu))) \subseteq f(\mathcal{U}(A, \psi)) \subseteq \mathcal{U}(B, \varepsilon)$$

(P2) Zvol $\varepsilon > 0$:

$$\exists\, \psi > 0 : f(\mathcal{P}(A, \psi)) \subseteq \mathcal{U}(B, \varepsilon)$$

Neboť $g(x) \neq A$ pro $x \in \mathcal{P}(a, \delta)$ a k ψ:

$$\exists\, \mu : g(\mathcal{P}(a, \mu)) \subseteq \mathcal{U}(A, \psi)$$

$$\gamma = \min(\delta, \mu) : g(\mathcal{P}(a, \gamma)) \subseteq \mathcal{P}(A, \psi)$$

$$f(g(\mathcal{P}(a, \mu))) \subseteq f(\mathcal{P}(A, \psi)) \subseteq \mathcal{U}(B, \varepsilon)$$

Q.E.D.

Intervaly

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*,\ a < b$. Pak **otevřeným intervalem** (a, b) nazýváme množinu všech $\{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$. **Uzavřený interval** $[a, b]$ je definován pro $a \leq b$ jako množina $\{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$.

VĚTA 7 (o limitě monotónní funkce):

Nechť funkce je monotónní na otevřeném intervalu (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}^*,\ a < b$. Potom existují $\lim_{x \to a_+} f(x)$ i $\lim_{x \to b_-} f(x)$.

DŮKAZ:

T-O-D-O: diagram
Nechť f je např. neklesající. Zvolíme $\varepsilon > 0$ a definujeme množinu $M = f((a, b)) = \{f(x),\ x \in (a, b)\}$. Potom definujeme $A := \inf M$. Z (ii) vlastnosti infima:

$$\exists\, x_0,\ x_0 \in (a, b) : A \leq f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in (a, x_0)$$

Tedy:

$$f(x) \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$$

Tudíž $f((a, x_0)) \subseteq \mathcal{U}(A, \varepsilon)$ a stačí zvolit $\delta > 0$, aby $\mathcal{P}^+(a, \delta) \subseteq (a, x_0)$. Tedy

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = A$$

Analogicky další případy.
Q.E.D.