Průběh funkce

Cvičení:

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

(1) $D(f)$

$$D\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \mathbb{R}$$
$$D(\arcsin) = [-1,1]$$
$$\Rightarrow D(f) = \{x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1\}$$

$$\left.\begin{aligned} -1 &\leq \frac{2x}{1+x^2} \\ -1-x^2 &\leq 2x \\ 0 &\leq 1+2x+x^2 = (x+1)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{2x}{1+x^2} &\leq 1 \\ 2x &\leq 1+x^2 \\ 0 &\leq 1-2x+x^2 = (x-1)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$$

Obor spojitosti: $2x$, $1+x^2$ — polynomy $\Rightarrow$ spojité na $\mathbb{R}$. sin spojitý a ryze monotonní na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\Rightarrow$ dle věta o inverzní funkci je arcsin spojitý na $[-1,1]$ $\Rightarrow$ dle VOLSF (P1) je f spojitá na $\mathbb{R}$.

(2) Průsečík s osou y: $f(0) = 0$, $[0,0]$ Průsečík(y) s osou x: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$, $[0,0]$

(3) Symetrie:
Funkce je lichá, neboť

$$f(-x) = \arcsin\left(\frac{-2x}{1+(-x)^2}\right) = -\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = -f(x)$$

(arcsin je lichý).
Funkce není sudá (neboť $f \not\equiv 0$) nebo $f(1) = \frac{\pi}{2}$, ale $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
Funkce není periodická, neboť $f(0) = 0$, ale $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(4) Limity v $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \arcsin(y) = 0$$

arcsin je spojitý v 0 $\Rightarrow$ (P1)

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

Z lichosti (nebo analogickým výpočtem)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

(5) První derivace:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}}$$

pro $x \neq \pm 1$.
Pozn.: $\sqrt{y^2} = |y|$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{|1-x^2|},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$$

Pozn.: $\frac{y}{|y|} = \operatorname{sign}(y)$ jen pro $y \neq 0$!

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-\frac{2}{1+x^2}$	$\frac{2}{1+x^2}$	$-\frac{2}{1+x^2}$

Existuje $f'(\pm1)$? Nevíme, ale spočítáme $f'_\pm(\pm1)$. Dvě možnosti:

- Z definice: $f'_+(1) = \lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
- Z věty o limitě derivací: $f'_+(1) = \lim_{x\to1+} f'(x)$, f je spojitá na $\mathcal{P}^+(1)$.

Z věty o limitě derivací:

$$f'_+(1) = \lim_{x\to1_+} f'(x) = \lim_{x\to1_+}\frac{-2}{1+x^2} \overset{\text{dosazení + spojitost}}{=} \frac{-2}{1+x} = -1$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to1_-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1_-}\frac{\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)-\frac{\pi}{2}}{x-1}$$

$$\overset{\text{L'H “}\frac{0}{0}\text{”}}{=} \lim_{x\to1_-}\frac{2}{1+x^2} \overset{\text{dosazení}}{=} \frac{2}{1+1} = 1$$

$$\Rightarrow f'(1) \text{ neexistuje}$$

(Analogicky $f'(-1)$ neexistuje. Buď z lichosti nebo analogickým výpočtem.)

(6) Intervaly monotonie:

$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'<0\Rightarrow\nearrow$	$f'>0\Rightarrow\searrow$	$f'<0\Rightarrow\nearrow$

(7) Extrémy:
Mohou být jen v bodech x, kde $f'(x)$ neexistuje nebo $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \ \dots \ \text{neexistují}$$
$$f'(x) \nexists \ \dots \ x = \pm 1, \ \text{kandidáti na extrém}$$

(i) $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} f \searrow \ \dots \ \mathcal{P}^-(-1,\delta) \\ f \nearrow \ \dots \ \mathcal{P}^+(-1,\delta) \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \text{ je bod lokálního minima}$$

(ii) $x = 1$:
Z lichosti: $x = 1$ je bod lokálního maxima. Další extrémy f nemá.

Jsou extrémy globální?

(i) $x = -1$:

$$\begin{array}{lll} f \searrow \ \dots \ (-\infty,-1) & \Rightarrow f(y) \geq f(-1) & \forall y \in (-\infty,-1) \\ f \nearrow \ \dots \ (-1,1) & \Rightarrow f(y) \geq f(-1) & \forall y \in (-1,1) \end{array}$$

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2}, \qquad f(y) \leq 0 \quad \forall x \in (1,\infty) \Rightarrow f(y) \geq f(-1)$$

Tedy -1 je globální minimum.

(ii) $x = 1$:
Z lichosti: $x = 1$ je bod globálního maxima.

(8) Druhá derivace, konvexita:

$$\left(\frac{2}{1+x^2}\right)' = \frac{-2}{(1+x^2)^2} \cdot 2x = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-\frac{2}{1+x^2}$	$\frac{2}{1+x^2}$	$-\frac{2}{1+x^2}$
$f''(x)$	$\frac{4x}{(1+x^2)^2}$	$-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$	$\frac{4x}{(1+x^2)^2}$
	$f'' < 0 \Rightarrow \cup$ (konk.)	$f'' > 0$ na $(-1,0) \Rightarrow \cap$ $f'' < 0$ na $(0,1) \Rightarrow \cup$	$f'' > 0 \Rightarrow \cap$ (konv.)

$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$f''(\pm 1)$ neexistuje, neboť $f'(\pm 1)$ neexistuje.

(9) Inflexní body:
Buď $f'' \nexists$ nebo $f''(x) = 0$.
$f'' \nexists$: $x = \pm 1$ — bod inflexe není, neboť $\nexists f'$. $f''(x) = 0$: $x = 0$ — kandidát na inflexi.

$$\left.\begin{array}{l} f'' > 0 \ \dots \ \mathcal{P}^-(0,\delta) \\ f'' < 0 \ \dots \ \mathcal{P}^+(0,\delta) \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0 \text{ je inflexním bodem.}$$

Jiné inflexní body f nemá (nutná podmínka jinde nesplněna).

(10) Asymptoty:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arcsin(\frac{2x}{1+x^2})}{x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-0x)=0$$

$$a=b=0$$

Nulová přímka, tedy osa x.

(11) Obor hodnot:

$$H(f)=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$-\frac{\pi}{2}\ \dots\ \text{globální minimum},\ -\frac{\pi}{2}=f(-1)$$
$$\frac{\pi}{2}\ \dots\ \text{globální maximum},\ \frac{\pi}{2}=f(1)$$

$$\overset{\text{Darboux}}{\Rightarrow}\ f\text{ nabývá každé mezihodnoty}$$