Spojité funkce na intervalu

Definice:

Je-li (a, b) interval, pak a nazýváme **počátečním bodem** intervalu, b pak **koncovým bodem** a $x \in (a, b)$ **vnitřními body** intervalu. Obdobně pro uzavřené a polouzavřené intervaly.

Definice:

Řekneme, že funkce f je **spojitá na intervalu** I, jestliže je spojitá zprava ve všech bodech intervalu kromě koncového a zároveň spojitá zleva ve všech bodech intervalu kromě počátečího.

VĚTA 8 (Darbouxova):

Nechť f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ a $f(a) < f(b)$. Pak

$$\forall y \in (f(a), f(b))\ \exists x \in (a, b) :\ f(x) = y$$

(Neboli spojitá funkce nabývá na intervalu všech mezihodnot.)

DŮKAZ:

T-O-D-O: diagram
Definujeme množinu $M := \{x \in [a, b] : f(x) < y\}$. Je neprázdná ($a \in M$) a omezená ($M \subseteq [a, b]$).
Označ $x_0 = \sup M$. Tvrdíme, že $f(x_0) = y$. To nyní dokážeme sporem s vlastnostmi suprema. Předpokládejme:

$$f(x_0) < y \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(x_0) \notin \mathcal{U}(y, \varepsilon) \Rightarrow y \notin \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$$

Funkce je spojitá, tedy k ε $\exists \delta > 0$ taková, že

$$f(x) \notin \mathcal{U}(y, \varepsilon) \qquad \forall x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap [a, b]$$

($f(x_0)$ je "strašně" daleko od y a nevejde se do ε-okolí y) **T-O-D-O:** Diagram
Čili x_0 není supremem množiny M, neboť existují body $x > x_0$, což je spor s první vlastností suprema!
Nechť $f(x_0) > y$. To je ve sporu s druhou vlastností suprema. $\exists \varepsilon > 0$ takové, že $y \notin \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon)$. K ε potom $\exists \delta > 0$ taková, že

$$\forall x \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon) : f(x) > y \Rightarrow \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f(x) > y$$

Pak ale x_0 nemůže být supremum, protože je před ním "díra" $x_0 - \delta$.
$\lightning$ *Spor*

VĚTA 9 (zobrazení intervalu spojitou funkcí):

(Nebo také "o spojitém obrazu intervalu".)
Nechť I je interval a nechť $f \colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak $f(I)$ je interval. (Pozor, obrazem otevřeného intervalu je uzavřený interval.)

DŮKAZ:

LEMMA:

Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ a nechť platí

$$\forall x, y \in M,\ \forall z \in \mathbb{R} :\ x < z < y \Rightarrow z \in M$$

Pak M je interval.

DŮKAZ:

Definujme $a := \inf M$, $b := \sup M$, $a \leq b$ (množina M je neprázdná) a tedy $(a, b) \subseteq M \subseteq [a, b]$. Tedy M je interval.

Q.E.D.

Nechť $y_1, y_2 \in f(I)$:

$$\exists\, x_1, x_2 \in I: \; f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme $y_1 < y_2$. Nechť $y_3 \in (y_1, y_2)$. Dle V.8- pak

$$\exists\, x_3 \in [x_1, x_2]: \; f(x_3) = y_3$$

Tedy má $f(I)$ vlastnosti množiny M z lemmatu, takže je dle lemmatu $f(I)$ interval.
Q.E.D.

Definice:

Máme-li $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, řekneme, že f nabývá v bodě $a \in M$:

- **(i)** **maxima na** M, jestliže $\forall x \in M,\; f(x) \leq f(a)$
- **(ii)** **minima na** M, jestliže $\forall x \in M,\; f(x) \geq f(a)$
- **(iii)** **ostrého maxima na** M, jestliže $\forall x \in M \setminus \{a\},\; f(x) < f(a)$
- **(iv)** **ostrého minima na** M, jestliže $\forall x \in M \setminus \{a\},\; f(x) > f(a)$
- **(v–viii)** **lokálních**, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že f nabývá na množině $M \cap \mathcal{U}(a, \delta)$ maxima (minima)

T-O-D-O: 1S je nějaké **divné**...

VĚTA 1S (Heineova věta pro spojitost):

Nechť f je definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pak f je spojitá v bodě a, právě když pro každou posloupnost $\{x_n\} \in D(f)$, $\lim_{n\to a} x_n = a$ platí $\lim_{n\to a} f(x_n) = f(a)$.

Cvičení:

Rozmyslete si, proč v této větě musí být navíc předpoklad $x_n \neq a$.

Známe: f spojitá v $a \Leftrightarrow [x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)]$.
Otázka: Kdy nabývá funkce svého maxima či minima?

$$A = \{f(x),\; x \in D(f)\},\; \exists \sup A$$

Příklady:

- **(i)** $f(x) = x$ na $(0, 1)$. **T-O-D-O:** graf
- **(ii)** f na $[0, 1]$ nemá maximum. Je spojitá na $[a, b]$? **T-O-D-O:** graf

VĚTA 10 (vztah spojitosti a extrémů):

Nechť f je spojitá na $[a, b]$. Pak f nabývá na $[a, b]$ svého minima i maxima.

DŮKAZ:

$$A = \{f(x),\; x \in [a, b]\},\; M = \sup A$$

Z vlastností suprema: $\exists$ posloupnost $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Pak $\{x_n\} \subset [a, b]$, tedy $\{x_n\}$ je omezená.

Tudíž dle Bolzano-Weistrasse $\exists$ posloupnost $\{x_{n_k}\}$,

$$\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = c \in [a, b]$$

f je spojitá v c, tudíž

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(c)$$

Ale přitom $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = M$, neboli

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = M$$

Podle věty o jednoznačnosti limity: $M = f(c)$, tedy f nabývá svého maxima M v bodě c.
Minimum obdobně.
Q.E.D.

VĚTA 11 (vztah spojitosti a omezenosti):

Spojitá funkce na $[a, b]$ je omezená.

DŮKAZ:

Dle V.10- f nabývá min, max. Označme $m = \min f$, $M = \max f$. Pak $m \leq f(x) \leq M$ pro $\forall x \in [a, b] \Rightarrow f$ je omezená.
Q.E.D.

Pozn.: Předpoklady jsou podstatné!

Prostá funkce

Definice:

Řekneme, že f je **prostá (injektivní)** funkce, jestliže $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ pro $\forall x, y \in D(f)$.

Příklady:

(i) sin není prostý na $\mathbb{R}$, ale je na $[-\pi/2, \pi/2]$.

(ii) Konstantní funkce nebývá prostá.

Inverzní funkce

Definice:

Nechť f je prostá funkce na $M \subset \mathbb{R}$, kdy $f\colon M \mapsto f(M)$. Pak **inverzní** funkce k f (označíme f^{-1}) je definována na $f(M)$ pro $\forall y \in f(M)$ jako:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Příklady:

(i) $f(x) = x^2$ na $[0, \infty)$

(ii) $f(y) = \sqrt{y}$ na $[0, \infty)$

VĚTA 12 (o inverzní funkci):

Nechť I je interval v $\mathbb{R}$, f je definovaná, spojitá a rostoucí (či klesající) na I. Pak f^{-1} je definovaná, spojitá a rostoucí či klesající na $f(I)$.

DŮKAZ:

Definovanost a monotonie

Nechť f je například rostoucí, pak f^{-1} je definovaná a rostoucí na $f(I)$.

$$y_i = f(x_i)$$
$$x_i = f^{-1}(y_i)$$

$$y_1 < y_2 \Longleftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} x_1 < x_2 \Longleftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Spojitost

Zvolíme $y_0 \in f(I)$, $y_0 = f(x_0)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $\varepsilon > 0$. Nechť y_0 je vnitřním bodem $f(I)$, pak x_0 je vnitřním bodem I.

$$\exists\, x_1, x_2,\ x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow (x_1, x_2) \subset \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$$

Zvol $\delta > 0$ tak, aby $\mathcal{U}(y, \delta) \subseteq (f(x_1), f(x_2))$. Tedy pro $\varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tak, že:

$$f^{-1}\left(\mathcal{U}(y_0, \delta)\right) \subseteq f^{-1}\left(f(x_1), f(x_2)\right) = (x_1, x_2) \subseteq \mathcal{U}(x_0, \varepsilon) = \mathcal{U}\left(f^{-1}(y_0), \varepsilon\right)$$

Tedy f^{-1} je spojitá v y_0. Obdobně pro krajní body (⟨cvičení⟩).

Q.E.D.