Taylorův polynom

Opakování

Polynom je každá funkce tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ pevné — koeficienty. $x \in \mathbb{R}$ je proměnná.

Poznámky:

(i) Všechny polynomy jsou definovány a spojité na $\mathbb{R}$.

(ii) Jestliže $a_n \neq 0$, pak $n =$ stupeň polynomu.

(iii) Je-li $\mathcal{P}$ polynom, stupeň $\mathcal{P} = n$, pokud $\mathcal{P}'$ je polynom, stupeň $\mathcal{P}' = n - 1$.

Příklady:

$$\begin{aligned}
&\deg \mathcal{P} = 0 \Rightarrow \mathcal{P} \text{ konstantní },\ \mathcal{P}(x) \equiv a_0\\
&\deg \mathcal{P} = 1 \Rightarrow \mathcal{P}(x) = a_0 x + a_0 \text{ lineární}\\
&\deg \mathcal{P} = 2 \Rightarrow \text{ kvadratická funkce, atd.}
\end{aligned}$$

Motivace

Aproximace funkcí pomocí polynomů.
Mějme f, $a \in \mathbb{R}$, $\exists f'(a) \in \mathbb{R}$. Tečna $t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. Potom

$$\begin{aligned}
f(a) &= t(a)\\
f'(a) &= t'(a)
\end{aligned}$$

Navíc

$$\lim_{x\to a}(f(x) - t(x)) = 0 \text{ (triviální), ale i}$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-t(x)}{x-a} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to a}(f'(x) - t'(x)) = 0 \text{ (aproximace je lepší než lineární)}$$

Chceme aproximace vyšších řádů.

Idea

Mějme f, $a \in \mathbb{R}$, $\exists f'(a) \in \mathbb{R}$. Chceme funkci f aproximovat polynomem v bodě a.

Aproximace polynomem stupně 1

$$P_1(x) = \alpha x + \beta$$

Polynom by měl procházet bodem a:

$$P_1(a) = f(a) \Rightarrow P_1(x) = c(x-a) + f(a)$$

(tedy hodnota funkce a aproximujícího polynomu splývají).
Zároveň chci:
$$P_1'(a) = f'(a) \Rightarrow P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Nejlepší aproximace polynomem stupně ≤ 1 je totiž **tečna** $t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. Potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0$$

Ukazuje se, že tyto dva požadavky jsou ekvivalentní.

Aproximace polynomem stupně 2

Příklad: $\cos x$ — lineární aproximace nic moc, kvadratická aproximace je už lepší. $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + c(x-a)^2$, $c = ?$.

Chci:

$$\begin{matrix} P_2(a) = f(a) \\ P_2'(a) = f'(a) \end{matrix} \wedge P_2''(a) = f''(a)$$

$$\Rightarrow P_2'(x) = f'(a) + 2c(x-a) \Rightarrow P_2'(a) = f'(a)$$

(první derivace splývá)

$$\Rightarrow P_2''(x) = 2c \Rightarrow c = \frac{f''(a)}{2}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

To je nejlepší kvadratická aproximace f v bodě a.

Navíc platí:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x-a)^2} = 0$$

(Důkaz: $\langle$cvičení$\rangle$)

Definice:

Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak funkci

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem funkce** f **řádu** n **v bodě** a.

Poznámky:

(i) $T_n^{f,a}$ je polynom, $\deg T_n^{f,a} \leq n$.

(ii) Příklad: $f(x) = \sin x$, $a = 0$, potom:

$$\begin{aligned} T_1^{\sin,0}(x) &= x \\ T_2^{\sin,0}(x) &= x \qquad \textit{(neboť } \sin''(0) = 0\textit{)} \\ T_3^{\sin,0}(x) &= x - \frac{x^3}{6} \qquad \textit{(cvičení)} \\ T_4^{\sin,0}(x) &= x - \frac{x^3}{6} \end{aligned}$$

Poučení: $\deg T_n^{f,a}$ nemusí být roven n.

(iii) Derivace Taylorova polynomu:

$$\left(T_n^{f,a}\right)'(x) = 0 + f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{2}(x-a)^2 +$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} = T_{n-1}^{f',a}$$

Tedy $\left(T_n^{f,a}\right)'(x) = T_{n-1}^{f',a}$. (!)

(iv) Splývání polynomu a funkce:

$$\left.\begin{aligned} T_n^{f,a}(a) &= f(a) \\ \left(T_n^{f,a}\right)'(a) &= f'(a) \\ &\vdots \\ \left(T_n^{f,a}\right)^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}\right\} (n+1) \text{ požadavků.}$$

Otázka

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \stackrel{?}{=} 0$$

VĚTA 33 (o aproximaci funkce Taylorovým polynomem):

Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a nechť existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Nechť $\mathcal{P}$ je polynom, $\deg \mathcal{P} \leq n$. Pak platí:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \mathcal{P}(x)}{(x-a)^n} = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{P} = T_n^{f,a}$$

Poznámka:

"$\Leftarrow$"

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

(odpověď na otázku je kladná)

"$\Rightarrow$"

Tuto vlastnost má mezi polynomy stupně $\leq n$ jen Taylorův.

DŮKAZ:

"$\Leftarrow$"

Indukcí:

$(n = 1)$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0$$

$(n - 1 \hookrightarrow n)$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \stackrel{\text{L'H } \text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \left(T_n^{f,a}\right)'(x)}{n(x-a)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{n} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0 \quad \textit{(dle indukčního předp.)}$$

"⇒"

(1. krok)

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathcal{P}(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}=\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{\mathcal{P}(x)-f(x)}{(x-a)^n}}_{0\ \textit{(předp.)}}+\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}}_{0\ \textit{(právě dok.)}}$$

LEMMA:
Q polynom, $\deg Q\le n$, $a\in\mathbb{R}$ a platí

$$\lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{(x-a)^n}=0$$

pak $Q\equiv 0$.
DŮKAZ:
Indukcí:

(1) $n=1$:
Q je lineární, $Q(a)=0$ (viz níže) $\Rightarrow Q(x)=c(x-a)$, $c\in\mathbb{R}$.
Víme:

$$\lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{x-a}=0$$
$$\Rightarrow 0=\lim_{x\to a}\frac{c(x-a)}{x-a}=c\Rightarrow c=0\Rightarrow Q(x)\equiv 0$$

(2) $n-1\hookrightarrow n$:

$$\left.\begin{array}{r}\deg Q\le n\\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{Q(x)}{(x-a)^n}=0\end{array}\right\}\Rightarrow Q(a)=0$$

$$\Rightarrow\ a \text{ je kořen polynomu } Q$$

$$\Rightarrow Q(x)=(x-a)R(x),\ R \text{ je polynom, } \deg R\le n-1$$

Potom

$$0=\lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)R(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}}$$

$$\stackrel{\text{ind. předp.}}{\Longrightarrow} R\equiv 0\Rightarrow Q(x)=(x-a)\cdot 0\Rightarrow Q\equiv 0$$

Q.E.D. (důkaz lemmatu)

(2. krok)

Víme:

$$\lim_{x\to a}\frac{\mathcal{P}(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}=0$$

($\mathcal{P}(x)-T_n^{f,a}(x)$ je polynom, deg $\leq n$)

$$\stackrel{\text{lemma}}{\Longrightarrow}\mathcal{P}(x)-T_n^{f,a}(x)\equiv 0\Rightarrow\mathcal{P}=T_n^{f,a}$$

Q.E.D.

Příklad:

$$\left.\begin{array}{l} f=\sin \\ x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

(plyne z implikace "$\Leftarrow$")

VĚTA 34 (obecný tvar zbytku):

Nechť f má vlastní $(n+1)$-ní derivaci v intervalu $[a,x]$, $a,x\in\mathbb{R}$, $x>a$.
Nechť φ je spojitá funkce na $[a,x]$, která má na (a,x) vlastní a nenulovou derivaci.
Pak existuje $\xi\in(a,x)$ takové, že

$$R_n^{f,a}(x)\stackrel{\text{def}}{=}f(x)-T_n^{f,a}(x)=\frac{1}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$$

(obrázek)

Důsledek 1 (Lagrangeův tvar zbytku):

$$R_n^{f,a}(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}\qquad(\exists\,\xi\in(a,x))$$

DŮKAZ:

Volím $\varphi(t)=(x-t)^{n+1}$. ⟨cvičení⟩

Důsledek 2 (Cauchyův tvar zbytku):

$$R_n^{f,a}(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a)\qquad(\exists\,\xi\in(a,x))$$

DŮKAZ:

Volím $\varphi(t)=t$. ⟨cvičení⟩

DŮKAZ:

Pro $t\in[a,x]$ definujeme

$$F(t):=f(x)-T_n^{f,t}(x)=f(x)-\left(f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)$$

Potom:

(i) F je spojitá na $[a, x]$ a má vlastní derivaci na (a, x).

(ii) $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x) = R_n^{f,a}(x)$

(iii) $F(x) = 0$

(iv) φ je spojitá, $\exists \varphi' \neq 0$ vlastní na (a, x)

Tedy podle V.23- (Cauchy o střední hodnotě):

$$\exists \xi \in (a, x): \qquad \frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

Přitom:

$$F'(t) = -\Bigg(f'(t) + f''(t)(x-t) + f'(t)(-1) + \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2 + \frac{f''(t)}{2}2(x-t)(-1) +$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}n(x-t)^{n-1}(-1) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\Bigg)$$

$$\overset{\text{požírání}}{\Longrightarrow} F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \qquad \forall t \in (a, x)$$

$$\Rightarrow F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

Platí tedy:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} & = & \dfrac{0 - R_n^{f,a}(x)}{\varphi(x) - \varphi(a)} \\ = & & = \\ \dfrac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} & = & \dfrac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{\varphi'(\xi)} \end{array}$$

To znamená:

$$R_n^{f,a}(n) = \frac{1}{n!}\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$$

Q.E.D.

Pozn.: V.32- platí i pro $x < a$.

Příklad:

Rozvoj funkce e^x:

$$f'(x) = e^x,\ f(x) = e^x, \ldots,\ f^{(n)}(x) = e^x$$

$$a = 0 \Rightarrow f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 1$$

Zaveďme si:

$$T_n^{\exp,0} = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

Pak:

$$e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + R_n^{\exp,0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + e\frac{\xi n}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Pro každé pevné x je $\xi n \in (a, x) \quad \forall n \in N$, tedy $e^{\xi n} \leq e^x$. Tudíž

$$|R_n^{\exp,0}(x)| \leq \frac{e^x |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

a platí

$$\lim_{n\to\infty} |R_n^{\exp,0}(x)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} = e^x \Rightarrow e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Důsledek:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

a speciálně pro $x = 1$:

$$e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

Chceme-li spočítat e s přesností $0,001$:

$$e = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1+j)!} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{1}{n \cdot n!}$$

Tedy:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} < e < \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{1}{n \cdot n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(na přenost $0,001$ stačí $n = 6$)

Důkaz iracionality e

Nechť $e = p/q$, kde $p, q \in \mathbb{N}$. Potom pro

$$m = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$$

máme

$$m < \frac{p}{q} < m + \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$qmn! < pn! < qmn! + \frac{q}{n}$$

Nyní stačí zvolit $n > q$.
$\not\sharp$ *Spor*

Rozvoj funkce sin

Mějme sin, $a = 0$:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x) & \sin'(0) &= 1 \\ \sin''(x) &= -\sin(x) & \sin''(0) &= 0 \\ \sin'''(x) &= -\cos(x) & \sin'''(0) &= -1 \\ \sin''''(x) &= \sin(x) & \sin''''(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_{2n+1}^{\sin,0}(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$R_{2n+1}^{\sin,0}(x) = \frac{1}{(2n+2)!} \sin^{(2n+2)}(\xi n) \cdot x^{2n+2}$$

$$|R_{2n+1}^{\sin,0}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0 \qquad \forall x,\ n \to \infty$$

$$\Rightarrow \sin x = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Obdobně

$$\cos x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j} \frac{x^{2j}}{(2j)!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Rozvoj funkce log(x+1)

Mějme $f(x)\colon y = \log(x+1)$. Pro $x = 0$ pak $f(0) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}(-1)^{n+1} \\ f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)! \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_n^{\log(x+1),0}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}(-1)^{j-1}(j-1)! \cdot x^j = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j}$$

$$R_n^{\log(x+1),0}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\xi)^{n+1}} x^{n+1} = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{n(1+\xi)^{n+1}}$$

To nelze odhadnout pro $|x| \geq 1$, pro $|x| < 1$ ano:

$$\Rightarrow \log(x+1) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j}, \qquad x \in (-1, 1]$$

Definice:

Řekneme, že funkce f je v bodě a zprava **malá řádu** n, jestliže

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Píšeme

$$f(x) = \sigma\left((x-a)^n\right), \qquad x \to a_+$$

(Laudaův symbol).

Pozor: Jde pouze o symboliku, *neplatí* žadná rovnost!

Příklady:

(i) $e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + \sigma(x^n), \quad x \to 0_+$

(ii) $x - \sin x = \sigma(x^2), \quad x \to 0$

(iii) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \sigma(x^3), \quad x \to 0$

Příklad:

Mějme sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$$

Pro která p konverguje?

Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{e}\cdot e^{(n+p)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{e}\cdot e^{(n+p)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\sigma\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - 1\right) =$$

$$= p - \frac{1}{2} - 1 + \underbrace{\sigma\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0},$$

tedy konverguje pro $p > \frac{3}{2}$.