Další vlastnosti derivací

$f'_+(a)$, je $f'(a)$ spojitá zprava v a?

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Derivace v bodě je číslo (směrnice tečny), vyjadřující míru změny. Zároveň je ale f' funkce, $x \mapsto f'(x)$.
f buď spojitá na I, $\exists f'$ (vlastní) na I. Je f' spojitá?
Není.

Příklad:

$\sin\frac{1}{x}$ není definována v nule.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(obrázek)

Tvrdím, že tato funkce má v nule derivaci nula.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(x \sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$x \neq 0 : f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - x^2\cos\left(\frac{1}{x}\frac{-1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

Je f' v 0 spojitá? Není, protože $\lim_{x\to 0} f'(x)$ neexistuje.
Co kdyby limita existovala?

VĚTA 25 (o limitě derivací):

Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a nechť $\exists \lim\limits_{x\to a_+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom $f'_+(a) = A$.

DŮKAZ:

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a_+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \overset{?}{=} \lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{1} = A$$

Můžeme L'Hospitalovat?

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to a_+}(x-a) &= 0 \\ \lim_{x\to a_+}(f(x)-f(a)) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ můžeme}$$

Q.E.D.

VĚTA 26 (vztah derivace a monotonie):

Nechť I je nezdegenrovaný interval, označme $\mathrm{Int}(I) = \{\text{vnitřní body } I\}$. Nechť f je spojitá na I a f' existuje vlastní na $\mathrm{Int}(I)$.

(i) Je-li $f' > 0$ na $\mathrm{Int}\, I$, pak f je rostoucí na I.
(ii) Je-li $f' \geq 0$ na $\mathrm{Int}\, I$, pak f je neklesající na I.
(iii) Je-li $f' < 0$ na $\mathrm{Int}\, I$, pak f je klesající na I.
(iv) Je-li $f' \leq 0$ na $\mathrm{Int}\, I$, pak f je nerostoucí na I.

DŮKAZ:

Idea: Mějme $f(a)$, $f(b)$, pak existuje mezi a a b bod ξ, $0 < f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Lagrange:

$$\forall a, b \in I \ (a < b) \ \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ale $f'(\xi) > 0 \wedge b - a > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) > 0 \Rightarrow f(b) > f(a) \Rightarrow f$ rostoucí na I.
Pro ostatní případy analogicky.
Q.E.D.

Poznámka:

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \qquad \forall x \in D(f)$$

Ale funkce f není rostoucí na $D(f)$. Tedy je důležitá úloha **intervalu**.

Varování

$f' > 0$ na $I_1 \cup I_2 \not\Rightarrow f$ rostoucí na I_1, I_2.