VĚTA (Bolzano—Weieistrassova věta):

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

DŮKAZ:

Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost. Pak definujme

$$A = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Platí, že $A \in \mathbb{R}$, neboť $\{a_n\}$ je omezená, tedy

$$b_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n) \in \mathbb{R}$$

$$c_1 = \inf_{n\in\mathbb{N}}(a_n) \in \mathbb{R}$$

$$c_1 \le c_n \le b_n \le b_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definujeme množinu:

$$M_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{j \in \mathbb{N} : a_j \in [A-1, A+1]\} \neq \emptyset$$

$$m_1 \stackrel{\text{def}}{=} \min M_1$$

(index prvního bodu v pásku $A-1, A+1$).
Nechť jsou definována $n_1, \ldots, n_{k-1}$. Pak definujeme:

$$M_k \stackrel{\text{def}}{=} \{j \in \mathbb{N},\ j > n_{k-1} : a_j \in [A - 1/2^k, A + 1/2^k]\}$$

$$n_k \stackrel{\text{def}}{=} \min M_k$$

Takto definuji nekonečnou posloupnost indexů $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Tím získávám vybranou posloupnost

$$d_k = a_{n_k} \qquad k \in \mathbb{N}$$

Tvrdím, že $\lim_{k\to\infty} d_k = A$. Zvolme $\varepsilon > 0$, pak $\exists\, k_0$ takové, že

$$1/2^k < \varepsilon \qquad \forall k \ge k_0$$

Tedy $|d_k - A| < \varepsilon$ pro $k \ge k_0$, tedy

$$\lim_{k\to\infty} d_k = A$$

Q.E.D.

VĚTA (Bolzano—Cauchyova věta):

Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu, právě když platí tzv. Bolzano—Cauchyova podmínka:

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m, n \ge n_0)$$

DŮKAZ:

"$\Rightarrow$"

Zvolíme $\varepsilon > 0$, pak $\exists\, n_0$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí:

$$|A - a_n| < \varepsilon/2$$

Tedy pro $\forall m, n \geq n_0$:

$$|a_m - a_n| = |a_m - A + A - a_n| \leq |a_m - A| + |a_n - A| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

"$\Leftarrow$"

Zvolíme $\varepsilon > 0$, pak $\exists\, n_0$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

Speciálně pro $m = n_0$:

$$a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon \qquad (\forall n \geq n_0)$$

$$a_{n_0} - \varepsilon < \liminf a_n \leq \limsup a_n < a_{n_0} + \varepsilon \qquad (\forall \varepsilon > 0)$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \overset{\text{V.10-}}{\Rightarrow} \exists \lim a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}$$

Q.E.D.