Nevlastní limita posloupnosti

Pokud posloupnost diverguje nade všechny meze (tedy neosciluje), říkáme, že nabývá nevlastní limity $\pm\infty$. Nejdříve si však musíme rozšířit dosud zavedené pojmy o nekonečna.

Rozšířená reálná osa

T-O-D-O: obrázek s úhly

Na nekonečna jsou možné dva pohledy. My se přidržíme toho, který zavádí nekonečna dvě.

Definujeme $\mathbb{R}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Nekonečna jsou pak zavedena takto:

- **Uspořádání:** $-\infty < a < +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- **Sčítání:** $$\begin{aligned} a + \infty &= \infty & \forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\} \\ -\infty - a &= -\infty & \forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\} \end{aligned}$$
- **Násobení:** $$\begin{aligned} a > 0 : a \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty \\ a < 0 : a \cdot (\pm\infty) &= \mp\infty \end{aligned} \quad \forall a \in \mathbb{R}^*$$
- **Dělení:** $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- **Absolutní hodnota:** $|\pm\infty| = +\infty$
- **Nedefinované výrazy:** $-\infty + \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\dfrac{x}{0}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Rozšířené supremum a infimum

Pokud množina M není shora omezená, $\sup M = +\infty$.
Pokud množina M není zdola omezená, $\inf M = -\infty$.

$$\sup \emptyset = -\infty$$
$$\inf \emptyset = +\infty$$

(Jediný případ, kdy $\inf > \sup$.)

Definice:

$\{a_n\}$ má nevlastní limitu $+\infty$, pokud:

$$\forall K > 0 \; \exists n_0, \; \forall n \geq n_0 : a_n \geq K$$

T-O-D-O: Zde může něco chybět…

VĚTA ():

Monotónní posloupnost má limitu. Pokud je omezená, má dokonce vlastní limitu.

DŮKAZ:

Pro neklesající posloupnost platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$, podobně pro nerostoucí. Dále viz rozšířená definice suprema a infima.

Q.E.D.

Věty o limitách pro nevlastní limity

- *V.1- (o jednoznačnosti limity)* platí i pro nevlastní limity.
- *V.2- (omezená a konvergentní posloupnost)* nemá pro nevlastní limity smysl.
- *V.3- (limita vybrané posloupnosti)* platí i pro nevlastní limity.
- *V.4- (aritmetika limit)* platí i pro nevlastní limity, ovšem pouze, je-li výraz vpravo definován. (Tuto podmínku tedy přidáme navíc.)
- *V.5- (limita a uspořádání)* platí i pro nevlastní limity.