Vlastní limita posloupnosti

Definice:

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu (je **konvergentní**) $A \in \mathbb{R}$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$$

Značíme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá vlastní limitu (je **divergentní**), jestliže:

$$\forall A \in \mathbb{R} \; \exists \, \varepsilon > 0, \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists \, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| > \varepsilon$$

Pozn.: Divergentní posloupností myslíme i posloupnost oscilující.

Příklady:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ není definovaná.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$

DŮKAZ:

(i) $A = 0$, dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 > 1/\varepsilon$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : 1/n \leq 1/n_0 < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$$

(ii) $A = 1$, mějme $a_n = \sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$, kde $\delta_n > 0$ pro $\forall n \geq 2$.
Sporem: nechť $\lim \neq 1$:

$$\exists \, \varepsilon > 0, \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists \, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \; \sqrt[n]{n} \geq 1 + \varepsilon$$

Pak musí existovat rostoucí posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k \in \mathbb{N}$ a $a_{n_k} > 1 + \varepsilon$. Tedy:

$$\sqrt[n_k]{n_k} > 1 + \varepsilon$$

$$1 + \delta_{n_k} > 1 + \varepsilon$$

$$n_k = (1 + \delta_{n_k})^{n_k} > (1 + \varepsilon)^{n_k} = 1 + n_k\varepsilon + \binom{n_k}{2}\varepsilon^2 + \cdots$$

$$> n_k\varepsilon + \frac{n_k(n_k - 1)}{2}\varepsilon^2$$

$$\Longrightarrow 1 > \varepsilon + \frac{n_k - 1}{2}\varepsilon^2 \qquad \forall n_k$$

$$\Longrightarrow \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^2} \cdot 2 + 1 > n_k \qquad \forall n_k$$

$\not\sharp$ *Spor*

(iii) $\exists\,\varepsilon$ takové, že pro $\forall n_0\ \exists\, n : |a_n - A| \geq \varepsilon$ pro každé předem dané $A \in \mathbb{R}$.
Sporem: předpokládejme $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = A$, pak k $\varepsilon = 1/3$ existuje n_0 takové, že $|(-1)^n - A| < 1/3$ pro $\forall n > n_0$.

$$2 = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n - A + A - (-1)^{n+1}| \leq$$
$$\leq |(-1)^n - A| + |A - (-1)^{n+1}| < 1/3 + 1/3 = 2/3$$

$\not\sharp$ *Spor*

(iv) e si později nadefinujeme právě jako tuto limitu.

(v) Triviální.

VĚTA 1 (o jednoznačnosti limity posloupnosti):

Každá posloupnost má nejvýše jednou limitu.

DŮKAZ:

Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A_1 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A_2$, bez újmy na obecnosti (dichotomie) nechť $A_1 > A_2$.
Zvolme $\varepsilon < (A_1 - A_2)/2$. Pak $\exists\, n_1, n_2$ taková, že:

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \geq n_1 : |a_n - A_1| < \varepsilon \\ \forall n \geq n_2 : |a_n - A_2| < \varepsilon \end{array}\right\} \text{pro } n \geq \max(n_1, n_2) \text{ platí zároveň obojí.}$$

$\not\sharp$ *Spor*

VĚTA 2 (o omezenosti konvergentní posloupnosti):

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

DŮKAZ:

Zvol $\varepsilon = 1$. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Pak dle definice $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow |a_n| < |A| + 1$$

Zvol $K := \max\{|A| + 1; |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\}$. Pak pro $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$.

Definice:

Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je **vybraná** z $\{a_n\}$, existuje-li *rostoucí* posloupnost

$$\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$$

taková, že $b_k = a_{n_k}$ pro $\forall k \in \mathbb{N}$.

VĚTA 3 (o limitě vybrané posloupnosti):

Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ a $\{b_k\}$ je vybraná posloupnost z $\{a_n\}$. Pak $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = A$.

DŮKAZ:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 : |a_n - A| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \Longrightarrow \exists\, k_0 \geq n_0 : a_{n_{k_0}} = b_{k_0}$$
$$\forall l \geq l_0 : |b_l - A| < \varepsilon \ \textit{(neboť } b_l \textit{ je také nějaké } a_n\textit{)}$$

Q.E.D.

VĚTA 4 (o aritmetice limit):

Nechť $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A \in \mathbb{R}$, $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} B \in \mathbb{R}$, pak platí:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = -A$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (1/a_n) = 1/A$ (pokud $a_n \neq 0$ pro $\forall n$ a $A \neq 0$)

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB$

Tedy také $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha A$ a za dobrého počasí i $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/b_n) = A/B$.

Pozor! Obecně neplatí $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n + d_n) = \lim\limits_{n\to\infty} c_n + \lim\limits_{n\to\infty} d_n$, nemusí jedna z nich existovat.

DŮKAZ:

(i) Triviální, stačí volit $n_0' = n_0$ (jako pro původní posloupnost).

(ii) Pro dané $\varepsilon > 0$ platí limita $\{a_n\}$ od n_1, $\{b_n\}$ od n_2, tedy obě platí od $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ dále. Tedy:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < 2\varepsilon \qquad \forall n \geq n_3$$

(iii) Nejdříve dokážeme lemmu.

LEMMA:

$$\exists\, K > 0,\ \forall n : |a_n| \geq K$$

DŮKAZ:
Mějme $\varepsilon < |A|/2$:

$$\exists\, n_0, \forall n \geq n_0 : |a_n| \geq 2\varepsilon \Rightarrow K \geq 2\varepsilon$$

Pro $n \in \{1, \ldots, n_0 - 1\} : K < \min\{|a_n|\} \Rightarrow \exists\, K$.
Q.E.D.

Zvolíme ε-pás kolem nuly o velikosti $K = \varepsilon_0$ takový, že $|a_n \geq \varepsilon_0|$, tedy $|1/a_n| \leq 1/\varepsilon_0$.

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| = \left|\frac{A - a_n}{a_n A}\right| \leq \frac{\varepsilon}{|a_n A|} \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{KA}$$

(iv) Mějme $n \geq n_3 = \max\{n_1, n_2\}$:

$$|(a_n b_n) - (AB)| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \leq |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| =$$

$$= |a_n| \underbrace{|b_n - B|}_{<\varepsilon} + |B| \underbrace{|a_n - A|}_{<\varepsilon} < |a_n|\varepsilon + |B|\varepsilon$$

Přitom $|a_n|$ je omezeno nějakou konstantou K a $|B|$ je konstantní rovnou, tedy:

$$|a_n|\varepsilon + |B|\varepsilon \leq \underbrace{(K + |B|)}_{\text{konst.}}\varepsilon$$

Q.E.D.

VĚTA 5 (o uspořádání limit):

Mějme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Pak:

(i) Pokud $A > B$, pak $\exists\, n_0$, od kterého $a_n > b_n$ pro $\forall \geq n_0$.

(ii) Pokud $\exists\, n_0$ takové, že $a_n \geq b_n$ pro $\forall \geq n_0$, pak $A \geq B$. (Pozor, neplatí $a_n > b_n \Rightarrow A > B$! Např. $a_n = 1/n$, $b_n = -1/n$.)

DŮKAZ:

Zvol $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{4}(A-B)$, pak pro n_1: $|a_n - A| < \varepsilon$, pro n_2: $|b_n - B| < \varepsilon$, pro $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ jsou tyto pásy již disjunktní:

$$a_n > A - \varepsilon > B + \varepsilon > b_n \qquad \forall n \geq n_3$$

Q.E.D.

VĚTA 6 (o dvou policajtech):

Nechť:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \in \mathbb{R}$$

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$$

Pak $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

DŮKAZ:

Zvolme $\varepsilon > 0$, pak:

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2 : |b_n - A| < \varepsilon$$

Definujme $n_3 := \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Pak jistě

$$A - \varepsilon \leq a_n \qquad \forall n > n_3$$

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = A$$

Q.E.D.

Příklad:

Nechť $a > 0$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

DŮKAZ:

$(a > 1)$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq a,\ \forall n \geq n_0 : a \leq n$.
Tedy $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$ pro $\forall n \geq n_0$.

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \wedge \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$(a = 1)$ Triviální.

$(a < 1)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{1/a}}$

$$1/a > 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/a} = 1$$

(Jak bylo dokázáno.)

$$1 \neq 0 \wedge \sqrt[n]{1/n} \neq 0 \quad \forall n \overset{\text{V.4}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} - 1/n = 1$$

Q.E.D.

VĚTA 7 (o součinu omezené a "nulové" posloupnosti):

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
Pozn.: Platí, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. (Důkaz: $\langle$cvičení$\rangle$.)

DŮKAZ:

Víme, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \leq K$. Pak dle předpokladu a dvou policajtů:

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq \underbrace{|a_n b_n| = |a_n||b_n|}_{\to 0} \leq \underbrace{K|a_n|}_{\to 0}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n b_n| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$$

Q.E.D.

Příklad: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$