Výroková logika

Definice:

Logika: věda o správnosti výroků.
Výrok: tvrzení, o kterém má smysl říci, zda je pravdivé nebo ne. Obvykle ve formě "premisa $\Rightarrow$ důsledek". Tarskiho definice: "Výrok A je pravdivý, jestliže A."

Příklad:

$$\begin{aligned}(A \Rightarrow B) &\Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)\\ &\Longleftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)\end{aligned}$$

Výroková funkce: výraz, z nějž obdržíme výrok po dosazení prvků za proměnné. Zapisujeme $V(x_1, \dots, x_n)$, $x_n \in M_n$.
Kvantifikátory: všeobecný ($\forall$) a existenční ($\exists$). Platí **princip stejnoměrnosti**:

$$\forall x\ \exists y : V(x,y) \Longleftarrow \exists y\ \forall x : V(x,y)$$

Základní metody důkazů

Používáme zejména důkazy sporem, indukcí, přímo a nepřímo. Je záhodno se vyhnout důkazu kruhem.
Při dokazování je vhodné si uvědomit formální definici dokazovaného výroku a aplikovat ji na náš konkrétní případ (např. dokazujeme-li existenci limity, může pomoci vyjít z dosazení do její definice).
Tvrzení: Pro $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ liché $\Rightarrow n$ liché. **Důkazy:**

(i) Přímo:

$$n^2 = p_1^2 \cdots p_k^2 \ \textit{(prvočíselný rozklad)}$$

$$n = p_1 \cdots p_k$$

$$j = 1, \dots, k : p_j \neq 2 \Rightarrow n \text{ liché}$$

(ii) Nepřímo:

$$n \text{ sudé } \Rightarrow n = 2m \Rightarrow n^2 = 4m^2 \Rightarrow n^2 \text{ sudé}$$

(iii) Sporem:

$$n^2 \text{ liché } \wedge n \text{ sudé}$$

$$\Longrightarrow n^2 + n \text{ liché } \Longrightarrow n(n+1) \text{ liché}$$

$\not\sharp$ *Spor*

(iv) Indukcí:
$n = 1$: 1^2 liché, 1 liché.
$n \Rightarrow n+2$: n^2 liché $\Rightarrow (n+2)^2$ liché (neboť $(n+2)^2 = n^2 + 2n + 4 = 2n + 5$ je liché).
Q.E.D.

Další příklady:

- **Přímo:** $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$

Cauchyho nerovnost:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$
$$\forall m \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$$

(1) $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, tedy platí.

(2) $\exists\, i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \neq 0$.
Trik: Definujme si:

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2$$

Pak platí:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$$\alpha > 0,\ f(x) > 0 \overset{\text{z grafu}}{\Longrightarrow} D \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0 \Longrightarrow \beta^2 \leq 4\alpha\gamma = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Q.E.D.

- **Sporem:** Předpokládáme opak a dokážeme jeho neplatnost.
  Iracionalita $\sqrt{2}$:

  $$x > 0 : x^2 = 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{Q}$$

  Nechť $x = p/q$, kde p, q jsou nesoudělná:

  $$x^2 = 2 \Longrightarrow p^2/q^2 = 2 \Longrightarrow p^2 = 2q^2$$
  $$p^2 = 4m \Longrightarrow q^2 = 2m$$

  To je ale spor s nesoudělností p, q.
  Q.E.D.

- **Indukcí:** Dokazujeme, že pro $\forall n \in \mathbb{N} : V(n)$. Stačí dokázat:

  (i) $V(1)$
  (ii) $V(n) \Rightarrow V(n+1)$

  Bernoulliho nerovnost:

  $$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}, x \geq -1$$

  (1) $n = 1$:
  $1 + x \geq 1 + x$

  (2) $V(n) \Rightarrow V(n+1)$:
  $(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$

  Q.E.D.

  A-G nerovnost:

  $$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$$

  $V(1)$ je triviální.
  $V(2)$: $(a_1 + a_2)/2 \geq \sqrt[2]{a_1 a_2}$. Nechť $a = A^2$ a $b = B^2$:

  $$(A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB \geq 0$$

$V(n) \Rightarrow V(2n)$:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{2n} =$$

$$= \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n} \geq$$

$$\overset{V(2)}{\geq} \sqrt[2]{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}} \geq$$

$$\overset{V(n)}{\geq} \sqrt[2]{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_{2n}}} =$$

$$= \sqrt[2n]{a_1 \cdots a_{2n}} \Longrightarrow V(2n)$$

$V(n+1) \Rightarrow V(n)$: Mějme $a_1, \ldots, a_n$.
Trik: Definujme:

$$b_1 := \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$$

$$b_2 := \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$$

$$b_n := \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$$

$$b_{n+1} := 1$$

$$V(n+1) \Longrightarrow \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{b_1 b_2 \cdots b_{n+1}} = 1$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{n+1} \geq n+1$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}} \geq n$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \Longrightarrow V(n)$$

Q.E.D.