Množina reálných čísel

Definice:

Množina A je **induktivní**, jestliže:

(i) $1 \in A$

(ii) $k \in A \Rightarrow k + 1 \in A$

$\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=}$ průnik všech induktivních množin (nebo také $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$).
$\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$
$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{p/q : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{R}$ za okamžik.
$\mathbb{C}$ se zabývat nebudeme.

VĚTA 1 (o reálném tělese):

Existuje právě jedno uspořádané těleso $\mathbb{R}$, na němž jsou dány operace "+" a "·", prvky "0" a "1" a binární relace "≥" s následujícími vlastnostmi:

I. Algebraické vlastnosti tělesa:

(i) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativita) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(ii) $x + y = y + x$ (komutativita) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $x + 0 = 0 + x = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(iv) $x + (-x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R} : \exists -x \in \mathbb{R}$

(v) $(xy)z = x(yz)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(vi) $xy = yx$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(vii) $1x = x1 = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(viii) $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$

(ix) $x(y + z) = xy + xz$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

II. Axiomy uspořádání:

(i) $x \leq y \wedge y \leq x \Longrightarrow x = y$ (slabá antisymetrie) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(ii) $x \leq y \wedge y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (tranzitivita) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(iii) $x \leq y \vee y \leq z$ (dichotomie) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(iv) $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

(v) $xy \geq 0$ $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \geq 0,\ y \geq 0$

Axiom o supremu

Nechť $M \in \mathbb{R}$. Řekneme, že M je:

(i) **shora omezená**, jestliže $\exists K \in \mathbb{R}$ pro $\forall x \in M$ takové, že $x \leq K$.

(ii) **zdola omezená**, jestliže $\exists K \in \mathbb{R}$ pro $\forall x \in M$ takové, že $x \geq K$.

(iii) **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

K pak nazýváme **horní (dolní) závorou množiny** M.

Supremum

Nechť M je neprázdná a shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Pak $\exists!\, G \in \mathbb{R}$, pro které platí:

(i) $\forall x \in M : x \leq G$ (horní závora)

(ii) $\forall G' < G\ \exists\, x \in M : G' \leq x$ (nejmenší horní závora)

(pro uzavřený interval $G \in M$, pro otevřený interval však **nikoliv**.

$$G = \sup M$$

Infimum

Nechť M je neprázdná a zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Pak $\exists!\, g \in \mathbb{R}$, pro které platí:

(i) $\forall x \in M : x \geq g$ (dolní závora)

(ii) $\forall g' > g\ \exists\, x \in M : g' \geq x$ (nejmenší dolní závora)

$$g = \inf M$$

DŮKAZ:

Definujme množinu $-M := \{-x, x \in M\}$. Pak $-M$ je shora omezená (neboť M je zdola omezená). Tedy $\exists\, G = \sup(-M)$ (supremum máme zavedeno axiomaticky).

$$G \geq -x \Rightarrow -G \leq x \Rightarrow g \leq x \qquad \forall x \in M$$

Pak ovšem $g := -G = \inf(M)$.

Příklady:

$(0,2)$	$\inf M = 0 \notin M$	$\sup M = 2 \notin M$
$[0,2]$	$\inf M = 0 \in M$	$\sup M = 2 \in M$
$\{n \in \mathbb{N} : x = 2 - 1/n\}$	$\inf M = 1 \in M$	$\sup M = 2 \notin M$
$(0,2) \cup \{3\}$	$\inf M = 0 \notin M$	$\sup M = 3 \in M$

VĚTA 2 (Archimédova vlastnost):

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N} : x < n$$

DŮKAZ:

Sporem: předpokládejme, že $\exists\, x \in \mathbb{R}$ takové, že pro $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq x$. Pak je $\mathbb{N}$ shora omezená, tedy $\exists\, G = \sup \mathbb{N}$.

Přitom pro $\mathbb{N}$ platí: $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$ (jde o průnik všech induktivních množin). Tedy $n + 1 \leq G$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, tudíž $n \leq G - 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Ovšem v tom případě $\sup \mathbb{N} = G - 1$!

$\not\sharp$ *Spor*

Spočetnost: Množina A je spočetná, existuje-li zobrazení $f\colon \mathbb{N} \xleftrightarrow{1\text{–}1} A$.

VĚTA 3 (hustota racionálních a iracionálních čísel v reálných číslech):

$\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}$: Kardinálně $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, můžeme zobrazit všechna racionální čísla na $\mathbb{N}$ (matice, řádky budou p a sloupce q, číslujeme diagonálně).

Pro každá $a, b \in \mathbb{R}, a < b\ \exists\, q \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že $a < q < b$, $a < r < b$ (ať uděláme sebeužší mezírku na reálné ose, vejde se nám tam nějaké racionální a iracionální číslo).

DŮKAZ:

Přímo:

($\mathbb{Q}$) $q = m/n$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.
Z Archimeda $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/(b-a) < n$, tedy $b-a > 1/n$. Pak ale jistě existuje $m \in \mathbb{Z}$ tak, že $m/n \in (a,b)$.

($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) Nechť $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $a < q_1 < q_2 < b$.
Zvolme $r = q_1 + 1/\sqrt{2}(q_2 - q_1)$. Pak:

- **(i)** $r \in (q_1, q_2) \subset (a,b)$, neboť $1/\sqrt{2} < 1$.
- **(ii)** $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($\langle$cvičení$\rangle$).

VĚTA 4 (o existenci n-té odmocniny):

(Tato věta je těžká!)

$$\forall x > 0, x \in \mathbb{R} \wedge \forall n \in \mathbb{N} : \exists\, y > 0, y \in \mathbb{R}, \quad y^n = x$$

DŮKAZ:

Nejdříve si označme:

$$R_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$R^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

Definujme si nějaké pomocné množiny:

$$M_1 := \{k > 0, k \in \mathbb{R} : k^n \leq x\}$$

$$M_2 := \{k > 0, k \in \mathbb{R} : k^n \geq x\}$$

LEMMA 1:

$$R^+ = M_1 \cup M_2$$

DŮKAZ:

Zřejmě $M_1 \subseteq \mathbb{R}^+, M_2 \subseteq \mathbb{R}^+ \Rightarrow M_1 \cup M_2 \subseteq \mathbb{R}^+$.
Kdyby $\mathbb{R}^+ \neq (M_1 \cup M_2)$, pakk $\exists\, k, k \neq (M_1 \cup M_2)$, tedy $k^n \nleq x$ ani $k^n \ngeq x$, což je ve sporu s dichotomií.
$\lightning$ *Spor*

Nyní si definujme $y_1 = \sup M_1$, $y_2 = \inf M_2$.

LEMMA 2:

$$y_1^n \leq x \wedge x \leq y_2^n$$

DŮKAZ:

Dokažme $y_1^n \leq x$ sporem: $y_1^n > x$.
Pak by dle Archimeda $\exists\, h > 0$, $h > \dfrac{ny_1^n}{y_1^n - x}$ (trik). Tedy:

$$k \in M_1 \Rightarrow k^n \leq x \Rightarrow -x \leq -k^n$$

$$y_1^n - x \leq y_1^n - k^n$$

Z binomické věty:

$$y_1^n - k^n = (y_1 - k)\underbrace{(y_1^{n-1} + y_1^{n-2}k + \cdots + y_1 k^{n-2} + k^{n-1})}_{n \text{ členů, všechny } \leq y_1^{n-1}} \leq (y_1 - k)ny_1^{n-1}$$

Z (ii) vl. suprema $\exists\, k \in M_1 : k > y_1 - 1/h$, tedy:

$$(y_1 - k)ny_1^{n-1} < \frac{ny_1^{n-1}}{h} < ny_1^{n-1}\frac{y_1^n - x}{ny_1^{n-1}} = y_1^n - x$$

$$y_1^n - x < y_1^n - x$$

$\not\downarrow$ *Spor*
Analogicky $x \leq y_2^n$.

Nyní konečně můžeme dokázat $y_1 = y_2$. Víme, že nejde, aby $y_2 < y_1$ (jinak $y_1^n > y_2^n$), tedy stačí vyloučit $y_1 < y_2$. Kdyby to ovšem platilo, dle V.3- by $\exists\, q \in \mathbb{Q}, q \in (y_1, y_2)$, což je však spor s $\mathbb{R}^+ = M_1 \cup M_2$.
Q.E.D.