Luboš Pick

Matematická analýza II

Přepsal Petr Baudiš

v ak. roce 2004/2005

"Kdo chce kam, pomozme mu tam."

Verze 0.20050623/L:1.616. Tato verze není garantována, nemusí být kompletní a může obsahovat chyby.
Aktuální verzi vždy najdete na `http://math.or.cz/`.
Sazba v programu TEX.

Primitivní funkce

Primitivní funkci nazýváme také neurčitý integrálem či antiderivací.

Jaké má uplatnění? Například fyzik chce zjistit, kde bude částice za půl hodiny, aby se na ni třeba šel podívat. Biolog je vyzbrojen Petriho miskou, má bakterie, o nich ví, v jakém poměru se množí, ale zná jen ten poměr. Když položí na misku 40 bakterií a jde na večeři, chce vědět, kolik jich tam bude, až se ráno vrátí.

Tedy známe derivaci a chceme zjistit původní funkci.

Základní vlastnosti primitivní funkce

Definice:

Nechť f je definovaná na otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkcí** k f na I, jestliže pro $\forall x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Příklad:

$$f(x) = x^2\colon \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) &= \frac{x^3}{3} \\ G(x) &= \frac{x^3}{3} + 1 \end{aligned} \right\} \text{ je primitivní k } f.$$

VĚTA 1 (tvar primitivní funkce):

Nechť F, G jsou dvě primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Potom $\exists\, C \in \mathbb{R}$ tak, že

$$F(x) = G(x) + C \qquad \forall x \in I$$

DŮKAZ:

$$H(x) = F(x) - G(x) \qquad x \in I$$

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad x \in I$$

Tedy je H na I konstantní.

Q.E.D.

Poznámky:

(i) Ne každá funkce má primitivní funkci. (Např. $f(x) = \operatorname{sign} x$ na $\mathbb{R}$ nemá primitivní funkci.)
Mějme $P = \{f$, které mají primitivní funkci$\}$.

(ii) f spojitá $\Rightarrow$ f má primitivní funkci. (Důkaz viz později — Riemannův integrál.)
f má primitivní funkci $\Rightarrow$ f je Darbouxovská. (Důkaz brzy.)

(iii) $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(1/x^2\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
Potom F' existuje na $\mathbb{R}$, ale není spojitá. Tedy pro $f = F'$ platí $f \in P - C$ (f má prim. funkci, ale není spojitá).

(iv) Jestliže f má primitivní funkci F na I, potom F je spojitá na I, neboť F má všude na I vlastní derivaci.

Značení:

$$\int f(x)\,dx = \text{ množina všech funkcí primitivních k } f \text{ na } I$$

$$x \in I : \int f(x)\,dx = F(x) \Longleftrightarrow F' = f \text{ na } I$$

Píšeme:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad x \in I$$

$$\underbrace{\int}_{\substack{\text{znak}\\\text{integrálu}}} \quad \underbrace{f(x)}_{\text{integrant}} \quad \underbrace{dx}_{\substack{\text{diferenciál}\\\text{(označuje}\\\text{integrační}\\\text{proměnnou)}}} \quad = \quad \underbrace{F(x)}_{\substack{\text{reprezentant}\\\text{všech integračních}\\\text{funkcí}}} \quad + \quad \underbrace{C}_{\substack{\text{aditivní konstanta}\\\in\mathbb{R}}}$$

VĚTA 2 (linearita primitivní funkce):

Nechť f má primitivní funkci F na otevřeném intervalu I, g má primitivní funkci G na I, nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom $(\alpha F + \beta G)$ je primitivní funkcí k funkci $(\alpha f + \beta g)$.

DŮKAZ:

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$$

Q.E.D.

Důsledek:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad a \neq 0$$

Příklady:

(i) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x \in \mathbb{R}$
$\alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha < -1 : x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} : x \in (0, \infty)$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$ $\qquad x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

(iii) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

(iv) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

(v) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

(vi) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$ $\qquad x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

(vii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \operatorname{cotg} x + C$ $\qquad x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

(viii) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

(ix) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \qquad x \in (-1,1)$

(x) $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C \qquad x \in (-1,1)$

VĚTA 3 (vztah spojitosti a existence primitivní funkce):

f spojitá na $I \Rightarrow f$ má primitivní funkci na I.
Důkaz: časem.

VĚTA 4 (vztah darbouxovskosti a existence primitivní funkce):

Nechť f má primitivní funkci na I. Potom f je darbouxovská na I.

Pozn.: Funkce je darbouxovská, pokud nabývá na intervalu všech mezihodnot.

DŮKAZ:

Nechť $y_1 < y_2$, $y_1, y_2 \in f(I)$. Navíc nechť $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $x_1, x_2 \in I$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_1 < x_2$. Nechť $z \in (y_1, y_2)$. Chci dokázat existenci $x^* \in (x_1, x_2)$ takového, že $f(x^*) = z$.

Nechť F je primitivní k f. Trik: definuji funkci

$$H(x) := F(x) - zx \qquad x \in I$$

$$H'(x) = f(x) - z \qquad x \in I$$

Tedy chci dokázat, že $H'(x) = 0$ pro nějaké x. To je náhodou druhá podmínka existence extrému.

H je spojitá, neboť má na I vlastní derivaci. Tedy je H spojitá na $[x_1, x_2]$, tedy H nabývá svého minima na $[x_1, x_2]$.

$$H'(x) = f(x_1) - z = y_1 - z < 0$$

Tedy H nemá minimum v x_1.

$$H'(x) = f(x_2) - z = y_2 - z > 0$$

Tedy H nemá minimum v x_2.

To znamená, že H má minimum v nějakém bodě $x^* \in (x_1, x_2)$.

Víme, že H má vlastní derivaci všude v $(x_1, x_2) \Rightarrow H'(x^*) = 0 \Rightarrow f(x^*) - z = 0 \Rightarrow f(x^*) = z$.
Q.E.D.

Získávání primitivních funkcí

Jak získat primitivní funkce k dalším funkcím?

(i) Z linearity:

- $\displaystyle\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$
- Obecně: $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

  pak $\displaystyle\int f(ax)\,dx = \frac{F(ax)}{a} + C.$
- $\displaystyle\int a^x\,dx = \int e^{x\log a}\,dx = \frac{1}{\log a}\int \log a \cdot e^{x\log a}\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C \qquad a \neq 0,\ a \neq 1,\ a > 0$

(ii) Z trigonometrických vzorců:

- $\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx + \int \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$
- $\int \sin^2 \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx$ atd.

(iii) Z obecných metod integrace.

Stručný průvodce tabulkovými hodnotami

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\operatorname{arctg} x$
$\int z^\alpha dx$	$\frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

T-O-D-O: Více, Ježíšku, více!

VĚTA 5 (o substituci):

(i) Nechť F je primitivní k f na (a,b). Nechť φ je definovaná na (α,β), $\varphi\colon (a,b) \to (\alpha,\beta)$ (s hodnotami v (α,β)). Navíc nechť existuje $\varphi'(t)$ vlastní pro každé $t \in (\alpha,\beta)$. Potom

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = F(\varphi(t)) + C \qquad t \in (\alpha,\beta)$$

(ii) Nechť φ má nenulovou vlastní derivaci na intervalu (α,β), $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$ (tedy se zobrazuje na celý interval). Nechť

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = G(t) + C \qquad t \in (\alpha,\beta)$$

Potom

$$\int f(x) \, dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C \qquad x \in (a,b)$$

DŮKAZ:

(i) $F(\varphi(t))' \overset{\text{VODSF}}{=} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

(ii) φ' je nenulová a má primitivní funkci $\Rightarrow$ φ' je darbouxovská $\Rightarrow$ φ nemění znaménko na $I \Rightarrow \varphi$ je ryze monotónní. Tedy:

$$G(\varphi^{-1}(x))' = f(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' \overset{\text{VODIF}}{=} G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} =$$

$$= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x)$$

Q.E.D.

Příklady na substituci:

(i) $F' = f$ na (a,b). φ na (α,β), existuje φ' vlastní na (α,β), $\varphi(\alpha,\beta) \to (a,b)$. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C \qquad t \in (\alpha,\beta)$$

Příklady:

(1) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx \qquad x \in (-\infty,\infty)$

$t \in (-\infty,\infty)$	$x \in (-\infty,\infty)$
$\varphi(t) = \operatorname{arctg}(t)$ $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$	$f(x) = x$ $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$

$$\Rightarrow \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C$$

Zrychlený zápis:

$$y = \operatorname{arctg} x$$
$$dy = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \int y\,dy = y^2/2 + C = \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C$$

Pozor, u zrychleného zápisu je třeba ověřit předpoklady!

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx \qquad x \in (1,\infty)$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \log x \\ dy &= \frac{dx}{x} \end{aligned}}$$

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \int \frac{dy}{y} = \log y + C = \log(\log x) + C$$

($\exists\, y'(x)$ vlastní pro $x \in (1,\infty)$)

(3) $\displaystyle\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad x \in (-1,1)$

$$(\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}) = -\int \frac{e^{\arccos x}}{-\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \arccos x \\ dy &= -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}}$$

$$-\int \frac{e^{\arccos x}}{-\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int e^y\,dy = -e^y + C = -e^{\arccos x} + C$$

$(\exists\, y'(x)$ vlastní pro $x \in (-1,1))$

(4) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \sin x \\ dy &= \cos x\,dx \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx &= \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x\,dx \\
&= \int \sin^4 x (1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx \\
&= \int y^4(1-y^2)^2\,dy \\
&= \int y^4(1-2y^2+y^4)\,dy \\
&= \int (y^4 - 2y^6 + y^8)\,dy \\
&= \frac{y^5}{5} - \frac{2}{7}y^7 + \frac{y^9}{9} + C \\
&= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{\sin^9 x}{9} + C
\end{aligned}$$

(ii) $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$, tedy $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$. Existuje φ' vlastní na (α,β), $\varphi'(t) \neq 0$ na (α,β).

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = G(t) + C \qquad t \in (\alpha,\beta)$$

Pak

$$\int f(x)\,dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C \qquad x \in (a,b)$$

Příklady:

(1) $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,dx \qquad x \in (-3,3)$

Nechť $x = 3\sin t$, $(a,b) = (-3,3)$.

$$\varphi(t) = 3\sin t,\ \varphi'(t) = 3\cos t \qquad (\alpha,\beta) = (-\pi/2, \pi/2)$$

$$\varphi((\alpha,\beta)) = 3\sin((-\pi/2, \pi/s)) = (-3,3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(t) &= 3\sin t \\ \varphi^{-1}(t) &= \arcsin(x/3) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= \int \sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt \\
&= 9\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt \\
&\overset{\cos t>0}{=} 9\int cos^2 t\,dt \\
&= 9\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt \\
&= 9\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right)+C \\
&= 9\left(\frac{\arcsin(x/3)}{2}+\frac{\sin(2\arcsin(x/3))}{4}\right)+C
\end{aligned}$$

$$x\in(-3,3)$$

Zkrácený zápis:

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 3\sin t \\ dx &= 3\cos t\,dt \\ t &= \arcsin x/3 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{9-x^2}\,dx &= \int \sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt \\
&= 9\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right)+C \\
&= 9\left(\frac{\arcsin(x/3)}{2}+\frac{\sin(2\arcsin(x/3))}{4}\right)+C
\end{aligned}$$

(iii) Substituce vs. lepení — kdy je substituce špatný nápad: $\displaystyle\int \frac{dt}{1+\sin^2 t}$.

Tato funkce je definovaná a spojitá na $\mathbb{R}$, tedy má primitivní funkci na $\mathbb{R}$.
Substituce: $x=\operatorname{tg} t$ pro $t\in(-\pi/2,\pi/2)$ nebo $t\in(-\pi/2+k\pi,\pi/2+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

$$t=\operatorname{arctg} x \Longrightarrow dt=\frac{dx}{1+x^2}$$

$$1+\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}\Longrightarrow \cos^2 t=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\Longrightarrow \sin^2 t = 1-\cos^2 t = 1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}$$

Tedy:

$$\int\frac{dt}{1+\sin^2 t}=\int\frac{1}{1+\frac{x^2}{1+x^2}}\frac{dx}{1+x^2}=\int\frac{dx}{1+2x^2}=$$

$$=\int\frac{dx}{1+\left(\sqrt{2}x\right)^2}=\frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2}}+C$$

Platí tedy:

$$\int \frac{dt}{1+\sin^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} t\right) + C \qquad t \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Nebo můžeme říci:

$$\int \frac{dt}{1+\sin^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} t\right) + C \qquad t \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$$

Máme problém — funkce je hrubě nespojitá, tedy to nebude hezká primitivní funkce. Použijeme proto tzv. mechanismus lepení — pospojuji jednotlivé kousky funkce tím, že je posuneme, aby na sebe hezky navazovaly, a limitami dodefinujeme v nedefinovaných bodech.

Na $(-\pi/2, \pi/2)$ zvolím $c_0 = 0$, tedy $F_0(t) = \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} t\right)}{\sqrt{2}}$.

Na $(\pi/2, 3\pi/2)$ zvolím c_1 tak, aby $\lim\limits_{t\to\pi/2_-} F_0(t) = \lim\limits_{t\to\pi/2+} F_0(t)$.

$$\lim_{t\to\pi/2_-} F_0(t) = \lim_{t\to\pi/2_-} \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} t\right)}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{t\to\pi/2_+} F_0(t) = \lim_{t\to\pi/2_+} \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} t\right)}{\sqrt{2}} + c_1 = c_1 + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Tedy $c_1 = \pi/\sqrt{2}$. Obecně pak:

$$F_0(t) = \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} t\right)}{\sqrt{2}} + k\pi/\sqrt{2} \qquad t \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Tedy $c_k = k\pi/\sqrt{2}$ pro $k \in \mathbb{Z}$.
Dodefinujeme F_0 v $\pi/2 + k\pi$ hodnotou

$$\lim_{t\to\pi/2+k\pi} F_0(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{\sqrt{2}}$$

Definujme tedy:

$$F_0(t) := \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} t\right)}{\sqrt{2}} + k\pi/\sqrt{2} & t \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi) \text{ pro } k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} + \dfrac{k\pi}{\sqrt{2}} & \text{pro } t = \pi/2 + k\pi \text{ pro } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Potom:

$$\int \frac{dt}{1+\sin^2 t} = F_0(t) + C \qquad t \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}$$

Derivace součinu: $(FG)' = F'G + G'F$

VĚTA 6 (integrace per partes):

Nechť I je otevřený interval a nechť f, g jsou spojité na I. Nechť f má primitivní funkci F a g má primitivní funkci G na I. Potom platí:

$$\int g(x)F(x)\,dx = F(x)G(x) - \int G(x)f(x)\,dx \qquad x \in I$$

DŮKAZ:

$$(G(x)F(x))' = g(x)F(x) + G(x)f(x)$$
$$\Rightarrow g(x)F(x) = (G(x)F(x))' - G(x)f(x)$$
$$\Rightarrow \int g(x)F(x)\,dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,dx$$

(Ze spojitosti integrály existují.)

Příklad:

$$\int \sin x \cdot x\,dx \qquad x \in \mathbb{R}$$

$F(x) = x$	$g(x) = \sin x$
$f(x) = 1$	$G(x) = -\cos x$

$$\int \sin x \cdot x\,dx = -x\cos x - \int 1 \cdot (-\cos x)\,dx =$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = \sin x - x\cos x + C$$

Příklad (skrytý součin):

$$\int \log x\,dx = \int 1 \log x\,dx \qquad x \in (0,\infty)$$

$F(x) = \log x$	$g(x) = 1$
$f(x) = 1/x$	$G(x) = x$

$$\int 1 \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + C = x(\log x - x) + C$$

Příklad (vícenásobné per partes):

$$\int e^x \sin x\,dx = I$$

$F(x) = \sin x$	$g(x) = e^x$
$f(x) = \cos x$	$G(x) = e^x$

$$\Rightarrow I = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$

$F(x) = \cos x$	$g(x) = e^x$
$f(x) = -\sin x$	$G(x) = e^x$

$$\Rightarrow I = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (-\sin x)\, dx \right) =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) - I$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} 2I &= e^x(\sin x - \cos x) + C \\ I &= e^x(\sin x - \cos x)/2 + C \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Příklad (formule ponížení)

$$I_n := \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$I_0 = x + c$$

$$I_1 = \operatorname{arctg} x + c \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$I_{n+1} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{n+1}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} x \, dx =$$

$F(x) = x$	$g(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^{n+1}}$
$f(x) = 1$	$G(x) = \dfrac{-1}{n(1+x^2)^n}$

$$= I_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n} - \frac{1}{2n} \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

Např. pro $n = 1$:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + c$$

Integrace racionálních funkcí

Mějme racionální funkci $R(x) = P(x)/Q(x)$, kde P, Q jsou polynomy.

Příklad: $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3+5x^2+6x-7}\, dx = ?$

Postup při integraci racionálních funkcí:

(i) Je třeba, aby $\deg P < \deg Q$.

$$P(x)/Q(x) = P_1(x) + P_2(x)/Q(x) \qquad \deg P_2 < \deg Q$$

Toho dosáhneme dělením polynomů.

Také jste už zapomněli, jak se dělí mnohočleny? Mějme

$$(x^5 + x^4) : (2x^3 + x^2)$$

Z Q vezmeme nejvyšší mocninu $q = 2x^3$, z P taktéž: $p = x^5$. Pak provedeme

$$r = p/q = \frac{x^5}{2x^3}$$

$$P := P - rQ$$

a to opakujeme, dokud $\deg P \geq \deg Q$. K výslednému R (součtu přes všechna r) pak přičteme zbytek po dělení P/Q.

Ukažme si celý postup na rozvleklém příkladu:

$$P := x^5 + x^4$$

$$Q := 2x^3 + x^2 \qquad R = 0$$

$$r = \frac{x^5}{2x^3} = x^2/2 \qquad R = x^2/2$$

$$P := x^5 + x^4 - x^2/2 \cdot (2x^3 + x^2) = x^5 + x^4 - x^5 - x^4/2 = x^4/2$$

$$r = \frac{x^4/2}{2x^3} = x/4 \qquad R = x^2/2 + x/4$$

$$P := x^4/2 - x/4 \cdot (2x^3 + x^2) = x^4/2 - x^4/2 - x^3/4 = -x^3/4$$

$$r = \frac{-x^3/4}{2x^3} = 1/8 \qquad R = x^2/2 + x/4 - 1/8$$

$$P := -x^3/4 + 1/8 \cdot (2x^3 + x^2) = -x^3/4 + x^3/4 + x^2/8 = x^2/8$$

$$R = x^2/2 + x/4 - 1/8 + \frac{x^2/8}{2x^3 + x^2}$$

(ii) Rozklad Q na kořenové činitele a irreducibilní kvadratické členy.

Základní věta algebry: Každý komplexní polynom stupně n má právě n kořenů (k-násobné kořeny počítáme k-krát — ale v $\mathbb{C}$). Pro reálný polynom věta neplatí (např. x^2+1 nemá kořeny).

Pozn.: Polynomy stupně dva jsou nejvyšší irreducibilní, neboť $z \in \mathbb{C}$ je kořenem P s reálnými koeficienty $\Longrightarrow \overline{z}$ je kořen (⟨cvičení⟩). Tedy pro $z = \alpha+\beta i$ platí $(x-z)(x-\overline{z}) = x^2-(z+\overline{z})x+z\overline{z}$ ($z + \overline{z}$ i $z\overline{z} \in \mathbb{R}$).

$$Q(x) = \alpha(x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_2)^{k_l} (x + \alpha_1 x + \beta_1)^{s_1} \cdots (x^2 + \alpha_n x + \beta_n)^{s_n}$$

(iii) Rozklad racionální funkce na parciální zlomky.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} + \cdots + \left(\frac{Cx + D}{x^2 + \alpha x + \beta}\right)^2 \quad \textit{(apod.)}$$

$A, B, C, D, \ldots$ jsou neurčité koeficienty, které je třeba spočítat (např. pomocí tzv. cover-up rule nebo fyzikální metody — probírá se na cvičení).

Porovnáváme koeficienty dvou polynomů.

(iv) Integrace parciálních zlomků.
Na $(-\infty, x_1)$ nebo na $(x_1, +\infty)$.

$$\int \frac{1}{(x-x_1)^k}\,dx = \begin{cases} \frac{-1}{k^{-1}}\frac{1}{(x-x_1)^{k-1}} + C & k \geq 2 \\ \log|x-x_1| + C & k = 1 \end{cases}$$

$$k \in \mathbb{N} : \int \frac{Cx+D}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,dx \text{ irreducibilní } \Longrightarrow \beta > \alpha^2/4$$

$$= \frac{C}{2}\int \frac{2x+\alpha-\alpha+2D/C}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,dx = \frac{C}{2}\underbrace{\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\,dx}_{I_1} + \left(D - \frac{\alpha C}{2}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}}_{I_2}$$

(Konstanty jsou na vás.)

$$I_1 = \begin{cases} \frac{-1}{k^{-1}}(x^2+\alpha x+\beta)^{-k+1} + C & \text{pro } k \geq 2 \\ \log(x^2+\alpha x+\beta) + C & k = 1 \end{cases} \quad (\textit{pro } x \in \mathbb{R})$$

$$I_2 : \text{ úprava na dvojmoc dvojčlenu: } x^2+\alpha x+\beta = (x+\alpha/2)^2 + \underbrace{(\beta-\alpha^2/4)}_{>0}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x+\alpha/2)^2 + (\beta-\alpha^2/4)^k} = \frac{1}{(\beta-\alpha^2/4)^k} \cdot \int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}\right)^2+1\right)^k}$$

Zvolím substituci:

$$t = \frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} \text{ umíme}$$

Integrace trigonometrických funkcí

Polynom: $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$

Polynom dvou proměnných: $P(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$

Příklad: $x^3 + 2y^3 - 3xy^2 + 14x - 15y^2 - 7$

Racionální funkce dvou proměnných: $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$

Zajímá nás integrace funkcí tvaru $R(\sin x, \cos x)$. Např.:

$$\frac{\sin^2 x \cos x - 4\sin^2 x}{\sin^4 x - 4\sin^2 x \cos x - \cos x + 1}$$

Použijeme substituci:

(i) $t = \sin x$, je-li R "lichá v cosinech", tj. $R(x,-y) = -R(x,y)$.

(ii) $t = \cos x$, je-li R "lichá v sinech", tj. $R(-x,y) = -R(x,y)$.

(iii) $t = \operatorname{tg} x$, je-li R "sudá v obou", tj. $R(-x,-y) = R(x,y)$.

(iv) $t = \operatorname{tg}(x/2)$ (dá se použít kdykoliv, ale vždy vede na racionální funkci).

Určitý integrál

Určitý integrál řeší tzv. "problém plochy" ("area problem"), kdy nás zajímá plocha pod grafem dané funkce v určitých mezích. Tento problém řešili již staří řekové, **Eudoxos** publikoval tzv. *metodu vyčerpávání (exhaust method)*, kdy se plocha počítá pomocí obdélníků a lichoběžníků. To je i podstata **Riemannova integrálu**.

Riemannův integrál

Definice:

Konečnou posloupnost bodů $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ nazveme **dělením intervalu** $[a,b]$, kde $-\infty < a < b < \infty$, jestliže $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Značíme $D = \{x_j\}_{j=0}^n$. Řekneme, že dělení D' **zjemňuje** D, jestliže každý bod dělení D je také bodem dělení D'.

> To je zajímavé, neboť náhle máme mezi děleními určité uspořádání. Ale pozor, navzájem můžeme porovnávat pouze některá dělení! Neplatí tedy dichotomie.

Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a,b]$. Položme

$$s(f,D) = \sum_{j=1}^n \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1})$$

$$S(f,D) = \sum_{j=1}^n \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1})$$

Čísla $s(f,D), S(f,D)$ nazýváme **dolním a horním součtem** funkce f přes $[a,b]$ vzhledem k D.
Mějme:

$$(\mathrm{R}) \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \sup_D s(f,D)$$

$$(\mathrm{R}) \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \inf_D S(f,D)$$

Tyto čísla nazveme dolním a horním **Riemannovým integrálem** funkce f přes interval $[a,b]$.
Pro ilustraci viz $\langle$diagram AII-1$\rangle$.

Příklad:

Dirichletova funkce $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Potom:

$$(\mathrm{R}) \int_{\underline{0}}^{1} D(x)\,dx = 0 \qquad \forall\ [x_{j-1}, x_j], \text{ kde } \inf D(x) = 0$$

$$(\mathrm{R}) \int_{0}^{\overline{1}} D(x)\,dx = 1$$

Definice:

Řekneme, že omezená funkce f má Riemannův integrál přes interval $[a,b]$, jestliže

$$(\mathrm{R}) \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = (\mathrm{R}) \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx$$

(Tedy D nemá Riemannův integrál.)

Příklad:

Riemannova funkce $R(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1/q & x = p/q,\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \end{cases}$

Pak $(\mathrm{R}) \displaystyle\int_0^1 R(x)\,dx = 0$ ($\langle$cvičení$\rangle$).

LEMMA:

f buď omezená na $[a,b]$, D, D' dělení $[a,b]$, D' zjemňuje D. Potom:

(i) $s(f,D) \le s(f,D') \le S(f,D') \le S(f,D)$

(ii) D_1, D_2 nechť jsou libovolná dělení $[a,b]$, pak $s(f,D_1) \le S(f,D_2)$.

DŮKAZ:

(i) Stačí pro případy

$$D = \{x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, \ldots, x_n\} \ \ \textit{(n + 1 bodů)}$$

$$D = \{x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, z, x_j, \ldots, x_n\} \ \ \textit{(n + 2 bodů)}$$

Pak (podle obrázku $\langle$diagram AII-2$\rangle$):

(1) $\inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\} \le \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, z]\}$
(2) $\inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\} \le \inf\{f(x) : x \in [z, x_j]\}$
Vezměme $(1) \cdot (z - x_{j-1}) + (2) \cdot (x_j - z)$, a máme:

$$\inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1}) \le \text{ součet}$$

$$\Longrightarrow s(f,D) \le s(f,D')$$

(analogicky $S(f,D) \ge S(f,D')$).
Zbývající nerovnost je zřejmá (inf $\le$ sup).

(ii) D_1, D_2 dáno, vezmeme D jako společné zjemnění D_1 i D_2. Potom:

$$s(f,D_1) \overset{\text{(i)}}{\le} s(f,D) \overset{\text{triv.}}{\le} S(f,D) \overset{\text{(i)}}{\le} S(f,D_2)$$

$$\Longrightarrow s(f,D_1) \le S(f,D_2)$$

Q.E.D.

Důsledek:

f buď omezená na $[a,b]$, $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$, potom:

$$m(b-a) \le (\mathrm{R}) \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \le (\mathrm{R}) \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Definice:

Nechť D je dělení intervalu $[a,b]$. **Normou dělení** D nazýváme číslo

$$\|D\| \overset{\text{def}}{=} \max_{j=1,\ldots,n} (x_j - x_{j-1})$$

VĚTA 1 (o tvaru horního a dolního Riemannova integrálu):

Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a nechť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nekonečná posloupnost dělení $[a,b]$. Navíc nechť $\lim_{n\to\infty}\|D_n\| = 0$. Potom:

$$\text{(R)}\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \sup_n s(f,D_n)$$

$$\text{(R)}\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx = \inf_n S(f,D_n)$$

DŮKAZ:

Zvolíme dělení D a $\varepsilon > 0$. Stačí dokázat, že $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $s(f,D_{n_0}) > s(f,D) - \varepsilon$. Pak totiž pro $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sup_{D'} s(f,D') \geq \sup_n s(f,D_n) \geq s(f,D) - \varepsilon$$

Máme pevně zvolené D a ε. Nechť

$$K = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Zvolíme n_0 tak, aby

$$\|D_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{K \cdot \#D}$$

kde $\#D$ je počet intervalů v D. Položím

$$P = D_{n_0} \cup D$$

P tedy zjemňuje D, proto

$$s(f,D) \leq s(f,P)$$

Nazvěme I_1 intervaly takové, které neobsahují body D, a I_2 intervaly takové, které obsahují alespoň jeden bod z D.

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{I_1\in P} (\inf_{I_1} f)\cdot|I| + \sum_{I_2\in P} (\inf_{I_2} f)\cdot|I| \\ &\leq s(f,D_{n_0}) + K\cdot\|D_{n_0}\|\cdot\#D \\ &< s(f,D_{n_0}) + \varepsilon \end{aligned}$$

Q.E.D.

Příklad:

$$\text{(R)}\int_0^2 x^2\,dx$$

Volíme $D_n = \{j/n\}_{j=0}^{2n}$ (tedy nejdříve dělím na poloviny, pak na čtvrtiny atd.). Pak

$$\|D_n\| = 1/n \to 0$$

tedy dle V.1-:

$$\text{(R)}\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \sup_n \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \sup_n \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{2n}(j-1)^2$$

$$\overset{\langle\text{cvičení}\rangle}{=} \sup_n \frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6n^3} = 8/3$$

$$(\mathrm{R}) \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_n \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \inf_n \frac{(2n-1)2n(4n+1)}{n^3} = 8/3$$

VĚTA 2 (kritérium existence Riemannova integrálu):

Nechť f je omezená na $[a,b]$, kde $-\infty < a < b < \infty$. Potom $f \in R([a,b])$ právě, když k $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, D$ dělení $[a,b]$ takové, že $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$. (Tedy pro jakoukoliv celkovou chybu ε můžeme najít natolik jemné dělení, že jeho celková chyba je menší.)

DŮKAZ:

"$\Rightarrow$"

$$f \in R([a,b]) \Longrightarrow \exists\, (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\,dx \Longrightarrow (\mathrm{R}) \underline{\int_a^b} f = (\mathrm{R}) \overline{\int_a^b} f$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ takovou, aby $\|D_n\| \to 0$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} s(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,D_n) = A = (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\,dx$$

Stačí zvolit $\varepsilon > 0$, potom $\exists\, n_0$ tak, aby zároveň platilo:

$$S(f,D_{n_0}) - A < \varepsilon/2$$
$$A - s(f,D_{n_0}) < \varepsilon/2$$

Tedy

$$S(f,D_{n_0}) - s(f,D_{n_0}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

"$\Leftarrow$"

Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak $\exists\, D$ dělení takové, že

$$S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$$

Potom také platí

$$0 \le (\mathrm{R}) \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - (\mathrm{R}) \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow (\mathrm{R}) \overline{\int_a^b} f = (\mathrm{R}) \underline{\int_a^b} f \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} f \in R([a,b])$$

Q.E.D.

Definice:

Nechť I je nezdegenerovaný interval, $f\colon I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je na I **stejnoměrně spojitá**, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ \forall x, y \in I : |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{1}$$

Pozn.: f je spojitá na I, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in I$:

$$\forall x \in I, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ \forall y \in I : |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{2}$$

| Mějme dvě tvrzení: "$\exists$ hůl na $\forall$ psa" (1) a "na $\forall$ psa $\exists$ hůl" (2). Pak triviálně platí (1) $\Rightarrow$ (2).

V druhém případě (spojitosti) tedy volím (ε, δ)-krabičku podle pevného x. Ovšem v případě stejnoměrné spojitosti mám pevně zvolené ε, udělám si (ε, δ)-krabičku, se kterou projedu všechna x a všude musí sedět.

Pozn.: Každá stejnoměrně spojitá funkce na I je automaticky spojitá.

Příklad:

$f(x) = 1/x$ na $(0,1)$. Pak f je spojitá, ale není stejnoměrně spojitá (spojitá ano). Chci tedy dokázat, že

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0\ \exists\, x, y \in (0,1) : |x-y| < \delta, \text{ ale } |1/x - 1/y| \geq \varepsilon$$

Zvolím $\varepsilon = 1$, $x_n = 1/n$, $y_n = 1/(n+1)$. Pak $|f(x_n) - f(y_n)| = 1 \geq \varepsilon$. Ale to je spor, neboť

$$\forall \delta > 0\ \exists\, n : |x_n - y_n| < \delta$$

Q.E.D.

VĚTA 3 (vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti):

Nechť f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$, kde $-\infty < a < b < \infty$. Pak f je na $[a,b]$ stejnoměrně spojitá.

DŮKAZ:

Pro spor nechť f není na $[a,b]$ stejnoměrně spojitá, tedy

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0\ \exists\, x, y : |x-y| < \delta, \text{ ale } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Zvolme $\delta = 1/n$, pak $\exists$ posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ v $[a,b]$ takové, že

$$|x_n - y_n| < 1/n \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

Podle Bolzano–Weistrass lze z posloupnosti $\{x_n\}$ vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$. Je na čase využít toho, že pracujeme nad uzavřeným intervalem:

$$\exists\, x \in [a,b] : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$$

Dle VOLU když $a < x_{n_k} < b$, tak $a \leq \lim x_{n_k} \leq b$, tedy na otevřeném intervalu bychom limitu mohli mít mimo něj.

| Tady je cítit ta pravá matematika, ne jen nudný kalkulus…;-)

Dále platí:

$$|y_{n_k} - x| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < 1/n_k + o(1) \to 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x$$

Víme: f je spojitá na $[a,b]$, tedy je f spojitá v x. Tedy k našemu $\varepsilon/2$ existuje δ tak, že

$$\forall x \in (x-\delta, x+\delta) \cap [a,b] : |f(x) - f(z)| < \varepsilon/2$$

Protože $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = x$, nutně

$$\exists\, k_0,\ \forall k \geq k_0 : x_{n_k}, y_{n_k} \in (x-\delta, x+\delta) \cap [a,b]$$

$$\varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k} - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

$\not\sharp$ *Spor*

VĚTA 4 (o vztahu spojitosti a riemannovské integrovatelnosti):

Nechť f je spojitá na $[a,b]$, pak $f \in R([a,b])$.

DŮKAZ:

Víme dle VSAO že f je omezená na $[a,b]$. Dále víme dle V.3-, že f je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$, tedy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ \forall x, y \in I : |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Najdeme dělení D intervalu $[a,b]$ takové, aby $\|D\| < \delta$. Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$. Označ

$$M_j := \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} |f(x)|$$

$$m_j := \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} |f(x)|$$

Ze stejnoměrné spojitosti ($x_j - x_{j-1} < \delta$) plyne, že

$$M_j < m_j + \varepsilon$$

$$S(f,D) - s(f,D) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon(b-a)$$

Tedy jsme dokázali, že

$$\forall \varepsilon\ \exists\, D : S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon(b-a)$$

a dle V.2- (kritérium r. int.) platí $f \in R([a,b])$.
Q.E.D.

VĚTA 5 (vztah monotonie a riemannovské integrovatelnosti):

Nechť f je omezená a mnotónní na $[a,b]$. Potom $f \in R([a,b])$.

DŮKAZ:

Bez újmy na obecnosti nechť f je neklesající. Zvolme $\varepsilon > 0$ a "ekvidistantní" dělení

$$D = \Big\{ \underbrace{a + \frac{b-a}{n} j}_{x_j} \Big\}_{j=0}^n$$

$$S(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} |f(x)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\frac{b-a}{n}$$

$$s(f,D) = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\frac{b-a}{n}$$

Tedy musí nutně platit

$$S(f,D) - s(f,D) = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}(f(x_j) - f(x_{j-1})) = \frac{((f(b) - f(a))(b-a)}{n}$$

Tedy k zadanému $\varepsilon > 0$ stačí volit n dost velké, aby

$$n > \frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{\varepsilon}$$

Potom však $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$ a $f \in R([a,b])$ dle V.2-.
Q.E.D.

VĚTA 6 (vlastnosti Riemannova integrálu):

(i) linearita: Mějme $f, g \in R([a,b])$, $-\infty < a < b < \infty$ a nějaký skalár $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $(f+g) \in R([a,b])$, $\alpha f \in R([a,b])$,

$$\text{(R)}\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \text{(R)}\int_a^b f(x)\,dx + \text{(R)}\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\text{(R)}\int_a^b \alpha f(x))\,dx = \alpha\text{(R)}\int_a^b f(x)\,dx$$

(ii) monotonie: Mějme $f, g \in R([a,b])$, $f(x) \le g(x)$ pro $\forall x \in [a,b]$. Potom

$$\text{(R)}\int_a^b f(x)\,dx < \text{(R)}\int_a^b g(x)\,dx$$

(iii) aditivita vzhledem k intervalům: Nechť $a < b < c \in \mathbb{R}$. Potom

$$f \in R([a,c]) \iff f \in R([a,b]) \wedge f \in R([b,c])$$

a navíc dokonce platí

$$\text{(R)}\int_a^c f(x)\,dx = \text{(R)}\int_a^b f(x)\,dx + \text{(R)}\int_b^c f(x)\,dx$$

DŮKAZ:

…je protivný. *Q.E.D.*

Úmluva

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

VĚTA 7 (Riemannův integrál jakožto funkce horní meze):

(Nejdůležitější věta sezóny. Také eufemisticky nazývána F.T.C., neboli základní věta kalkulu.)
Nechť $I \in \mathbb{R}$ je neprázdný interval libovolného typu. Nechť dále $f \in R([\alpha,\beta])$ pro všechna $\alpha, \beta \in I$. Nechť $c \in I$ je libovolný pevně stanovený bod. Položme

$$F(x) := (\mathrm{R})\int_c^x f(t)\,dt \qquad x \in I$$

Potom platí:

(i) F je spojitá na I.

(ii) Je-li $x_0 \in I$ bodem spojitosti f, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

DŮKAZ:

(i) Nechť $y_0 \in I$ není pravý krajní bod I. Chci dokázat, že

$$\lim_{y \to {y_0}_+} (F(y) - F(y_0)) = 0$$

(analogicky pak pro spojitost zleva).
Víme:

$$F(y) - F(y_0) = (\mathrm{R})\int_c^y f(t)\,dt - (\mathrm{R})\int_c^{y_0} f(t)\,dt \overset{\text{V.6-(iii)}}{=} (\mathrm{R})\int_{y_0}^y f(t)\,dt$$

$$\exists\,\delta > 0 : f \in R([y, y_0 + \delta])$$

Tedy f je na $[y_0, y_0 + \delta]$ omezená, a tedy existují $m, M \in \mathbb{R}$ taková, že

$$m = \inf\{f(t) : t \in [y_0, y_0 + \delta]\}$$

$$M = \sup\{f(t) : t \in [y_0, y_0 + \delta]\}$$

Tudíž dle V.6-(ii):

$$\forall y \in [y_0, y_0 + \delta] : \underbrace{m(y - y_0)}_{\to 0} \le (\mathrm{R})\int_{y_0}^y f(t)\,dt \le \underbrace{M(y - y_0)}_{\to 0}$$

$$\lim_{y \to {y_0}_+} (F(y) - F(y_0)) = \lim_{y \to {y_0}_+} (\mathrm{R})\int_{y_0}^y f(t)\,dt = 0$$

(ii) Nechť $x_0 \in I$ je bod spojitosti funkce f. Chceme:

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

$$F'(x_0) - f(x_0) = 0$$

Zároveň víme, že

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 - h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

Tedy nutně platí

$$F'(x_0) - f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0) \stackrel{!}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt$$

Víme, že f je spojitá v x_0. Zvolme $\varepsilon > 0$, pak tedy $\exists\,\delta > 0$ taková, že $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ pro $\forall\,|t - x_0| < \delta$.

Takže pro $h < \delta$ máme $f(t) - f(x_0) < \varepsilon$ pro $\forall t \in [x_0, x_0 + h]$. Tudíž pro $\forall \varepsilon > 0$:

$$F'(x_0) - f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt < \lim_{h\to 0} \varepsilon \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} dt = \varepsilon$$

a tedy

$$F'(x_0) - f(x_0) = 0$$

Q.E.D.

Poznámky:

(i) Funkce f ve větě 7 nemusí být na I spojitá, ani riemannovsky integrovatelná, dokonce ani omezená. Musí platit pouze $f \in R([\alpha, \beta])$ pro $\forall \alpha, \beta \in I$ (včetně $\beta \leq \alpha$).

> Rozdíl mezi riemannovskou integrovatelností na I a na libovolném jeho podintervalu můžeme dobře vidět např. na $I = (0, 1)$ a $f = 1/x$.

(ii) Bez předpokladu spojitosti f v x_0 tvrzení V.7-(ii) neplatí.

Příklad:

Vezměme $f = \operatorname{sign} x$, $I = [-1, 1]$, $c = 0$. Potom

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{sign} t\,dt = |x| \text{ na } [-1, 1]$$

$F'(c)$ neexistuje, tzn. f není spojitá v nule.

Důsledky:

(i) Nechť f je spojitá na $(a, b) \in \mathbb{R}$. Potom f má na (a, b) primitivní funkci. (V5.2-)

DŮKAZ:

f je spojitá na (a, b), tedy je f spojitá v x_0 pro $\forall x_0 \in (a, b)$, tedy dle V.7-(ii) $F'(x_0) = f(x_0)$, kde F je funkce z V.7-, tedy

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad c \in (a, b) \ \textit{(libovolné)}$$

Tudíž F je primitivní k f na (a, b).
Q.E.D.

(ii) Je-li f spojitá na $[a, b]$, potom

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$$

kde F je libovolná primitivní funkce k f na (a, b).

DŮKAZ:

f je spojitá na $[a, b]$, tedy dle (i) má primitivní funkci G na (a, b). Nechť $c \in (a, b)$ a

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [a, b]$$

Potom dle (i) je F primitivní funkce k f na (a, b), a tedy dle V5.1-existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že

$$G(x) = F(x) + d \qquad \forall x \in (a, b)$$

$$G(x) = G(c) + \int_c^x f(t)\,dt$$

Neboť G je spojitá na $[a, b]$, platí rovnost

$$\lim_{x\to b_-} G(x) - \lim_{x\to a_+} G(x) = G(c) + \int_c^b f(t)\,dt - \left(G(c) + \int_c^a f(t)\,dt\right) =$$

$$= \int_c^b f(t)\,dt + \int_a^c f(t)\,dt \overset{\text{V.6-(iii)}}{=} \int_a^b f(t)\,dt$$

Q.E.D.

Newtonův integrál

Řekneme, že funkce f má na intervalu $(a,b) \in \mathbb{R}$ **Newtonův integrál**, jestliže existuje primitivní funkce F k funkci f na (a,b) a existují $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$. Potom **hodnotou Newtonova integrálu** z f přes (a,b) nazýváme číslo

$$\text{(N)}\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$$

Množinu funkcí, které mají Newtonův integrál přes (a,b) značíme $N(a,b)$.

Poznámky:

(i) Je-li f spojitá na $[a,b]$, potom

$$\text{(N)}\int_a^b f(x)\,dx = \text{(R)}\int_a^b f(x)\,dx$$

(důsledek (ii) V6.7-).

(ii) $f(x) = 1/\sqrt{x}$ na $(0,1)$:

$$\text{(N)}\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{x\to 1_-} 2\sqrt{x} - \lim_{x\to 0_+} 2\sqrt{x} = 2 - 0 = 2$$

Přitom $1/\sqrt{x}$ není na $(0,1)$ omezená, tedy nepatří do $R([0,1])$. Tedy

$$1/\sqrt{x} \in N(0,1) \setminus R([0,1])$$

(iii) $f(x) = \operatorname{sign} x$ na $[-1,1] \in R([-1,1])$, ale nemá na $(-1,1)$ primitivní funkci (není tam darbouxovská), tedy pro změnu

$$\operatorname{sign} x \in R([-1,1]) \setminus N(-1,1)$$

(iv) Existují omezené funkce $f \in N(a,b) \setminus R([a,b])$, ale je obtížné je zkonstruovat.

VĚTA 8 (per partes pro určitý integrál):

Nechť f, g, f', g' jsou spojité na $[a,b]$. Potom

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

kde

$$[h(x)]_{x=a}^{x=b} \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to b_-} h(x) - \lim_{x\to a_+} h(x)$$

DŮKAZ:

…nás nezajímá. *Q.E.D.*

VĚTA 9 (substituce pro určitý integrál):

(i) Nechť f je spojitá na $[a,b]$ a nechť mám

$$\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$$

Nechť φ má na (α,β) spojitou derivaci. Pak

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

(ii) Nechť f je spojitá na $[a, b]$ a nechť mám

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$$

nechť $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$ a nechť φ má na (a, b) spojitou nenulovou derivaci. Pak

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dx$$

DŮKAZ:

…nechceme. *Q.E.D.*

Příklad:

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \sin t \\ dx &= r \cos t \end{aligned}}$$

$$= r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 \cos^2 t} \cos t\, dt = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \pi/2 \cdot r^2$$

Aplikace určitého integrálu

Délka křivky

Definice:

Nechť f je definovaná a riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ a D je dělení $[a, b]$. Potom lze spočítat délku křivky vzhledem k dělení D

$$L(f, D) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_j - x_{j-1}) + |f(x_j) - f(x_{j-1})|}$$

Délku křivky samotnou pak definujeme jako

$$L(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_D \{L(f, D)\}$$

VĚTA 10 (o délce křivky):

Nechť f má na (a, b) spojitou derivaci. Pak délka křivky funkce f je

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Objem a obsah pláště rotačního tělesa

Definice:

Nechť f je na $[a, b]$ nezáporná funkce. Potom definujeme rotační těleso jako

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ |x, y, z| \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x) \right\}$$

VĚTA 11 (o objemu a obsahu pláště rotačního tělesa):

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Konvergence řad

VĚTA 12 (integrální kritérium konvergence řad):

Nechť f je spojitá, nezáporná a nerostoucí na intervalu $[n_0, \infty]$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$. Mějme dále posloupnost $\{a_n = f(n)\}_{n=1}^{\infty}$. Potom

$$\sum a_n \text{ konverguje } \iff \text{(N)} \int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx < \infty$$

Důkaz: Nechceme. *Q.E.D.*

Příklad:

Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log^{\alpha} x}$$

$y = \log x$ $dy = dx/x$
$x:\ 2 \ \dots \infty$ $y: \log 2 \dots \infty$

Pro $\alpha \neq 1$ platí:

$$\int_{\log 2}^{\infty} \frac{dy}{y^{\alpha}} = \left[\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{\log 2}^{\infty} = \frac{\lim_{y\to\infty} y^{1-\alpha} - \log 2^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

To je menší než nekonečno (konverguje), právě když $\alpha > 1$.
Pro $\alpha = 1$ platí:

$$\int_{\log 2}^{\infty} \frac{dy}{y^{\alpha}} = [\log y]_{\log 2}^{\infty} = \lim_{y\to\infty} \log y - \log 2 = \infty$$

Tedy platí:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n} \text{ konverguje } \iff \alpha > 1$$

Posloupnosti a řady funkcí

Konvergence posloupností funkcí

Definice:

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a f_n je posloupnost funkcí definovaných na M. Řekneme, že posloupnost f_n **konverguje bodově k** f **na** M a značíme

$$f_n \to f \text{ na } M$$

jestliže

$$\forall x \in M : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

neboli

$$\forall x \in M,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Řekneme, že posloupnost f_n **konverguje stejnoměrně k** f **na** M a značíme

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M$$

jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Řekneme, že posloupnost f_n **konverguje lokálně stejnoměrně k** f **na** M a značíme

$$f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \text{ na } M$$

jestliže

$$\forall x \in M\ \exists \delta > 0 : f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \cap \mathcal{U}(x,\delta)$$

Příklady:

(i) $f_n(x) := x^n$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$
Potom f_n konverguje na $[0,1]$ bodově, ale ne stejnoměrně, k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Platí však, že $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na $[0,1)$.

(ii) $g_n(x) := \sin(nx)/2^n$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$
Potom g_n konverguje na $[0,1]$ stejnoměrně k identicky nulové funkci, neboli $f_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$, neboť

$$|f_n(x) - 0| \leq 1/2^n \to 0$$

(nezávisle na x).

(iii) $f_n(x) := \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$
Potom $f_n \to 0$ a $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ na $(0,\infty)$. Přitom však $f_n \not\rightrightarrows 0$, neboť $f_n(1/n) = 1/2$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Poznámky:

(i) Srovnání typů konvergence:

$$f_n \rightrightarrows f \Longrightarrow f_n \to f$$

(ii) Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně na otevřeném intervalu (a, b), právě když konverguje stejnoměrně na každém jeho uzavřeném podintervalu:

$$f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \text{ na } (a,b) \Longrightarrow f_n \rightrightarrows f \text{ na } [\alpha, \beta] \qquad \forall [\alpha, \beta] \subset (a, b)$$

(netriviální, je třeba si rozmyslet).

(iii) Bodová konvergence nemusí zachovat omezenost ani integrovatelnost. Vezměme například tzv. funkční řezy:

$$f_n(x) := \begin{cases} 1/x & x \in [1/n, 1) \\ n & x \in (0, 1/n] \end{cases}$$

To je posloupnost omezených a integrovatelných funkcí na $(0, 1)$, jenž konverguje bodově k funkci $1/x$, která není na $(0, 1)$ omezená ani integrovatelná:

$$\text{(N)} \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{x \to 1_-} \log x - \lim_{x \to 0_+} \log x = 0 + \infty = \infty$$

VĚTA 1 (kritérium stejnoměrné konvergence):

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $n \in \mathbb{N}$ a nechť f_n je posloupnost funkcí definovaných na M. Pak platí

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

DŮKAZ:

$f_n \rightrightarrows f$ na M, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall n \geq n_0, \; \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Pokud toto platí pro každé x, musí to platit i pro supremum přes x, jen se musí změnit nerovnost na neostrou (supremum nemusí být prvkem množiny):

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall n \geq n_0 : \sup_{x \in M} \{|f_n(x) - f(x)|\} \leq \varepsilon$$

Tím však zároveň říkáme, že limita tohoto suprema je nulová.

Q.E.D.

Příklady:

Předchozí příklady z pohledu V.1-:

(i) $\sup\limits_{x\in[0,1]} |x^n - f(x)| = 1$

(ii) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| \dfrac{nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| \geq 1/2$

(iii) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| \dfrac{\sin nx}{2^n} - 0 \right| < \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} 1/2^n \to 0$

Otázka

Mějme $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b), $x_0 \in (a,b)$. Platí, že

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Pro bodovou konvergenci však neplatí

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1_-} x^n = 1 \neq \lim_{x\to 1_-} \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

Ale co pro stejnoměrnou?

VĚTA 2 (Moore–Osgood):

Mějme neprázdnou množinu $M \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a $n \in \mathbb{N}$. Nechť f_n je řada funkcí definovaných na M a nechť platí následující dva předpoklady:

(i) $f_n \rightrightarrows f$ na M

(ii) Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ existuje $\lim\limits_{x\to x_{0+}} f_n(x) := a_n \in \mathbb{R}$.

Potom existují vlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to x_{0+}} f(x)$$

DŮKAZ:

Zvol $\varepsilon > 0$, pak

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\forall m, n > n_0,\ \forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon$$

(trojůhelníková nerovnost pozpátku).

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to x_{0+}} f_m(x) &:= a_m \\ \lim_{x\to x_{0+}} f_n(x) &:= a_n \end{aligned}\right\} \Longrightarrow |a_n - a_m| \leq 2\varepsilon$$

Tudíž posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku, tedy

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$|f(x) - a| \overset{\triangle}{\leq} \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{A} + \underbrace{|f_n(x) - a_n|}_{B} + \underbrace{|a_n - a|}_{C} \qquad \forall n, x$$

Zvol $n \geq n_0$, pak $A < \varepsilon$. n lze zvolit tak velké, aby i $C < \varepsilon$. Dále k tomuto n zvolíme $\delta > 0$ takovou, aby

$$\forall x \in \mathcal{P}^+(x_0, \delta) : B < \varepsilon$$

Pak však také

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \; \forall x \in \mathcal{P}^+(x_0, \delta) : |f(x) - a| < 3\varepsilon|$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Q.E.D.

Důsledek:

Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na I, kde f_n je na I spojitá. Potom f je na I také spojitá.

DŮKAZ:

Mějme $x_0 \in I$, které není jeho pravý krajní bod.

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) \stackrel{?}{=} f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0+} \lim_{n \to \infty} f_n(x) \stackrel{\text{V.2-}}{=} \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0+} f_n(x)$$

Neboť je však f v x_0 spojitá, tato limita se rovná

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) \stackrel{f_n \to f}{=} f(x_0)$$

Q.E.D.

Poznámka:

Z (ii) implicitně vyplývá, že M obsahuje nějaké okolí bodu x_0. Platí také analogická verze této věty pro jednostranné limity v bodě x_0.

LEMMA:

Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je na neprázdné množině $M \subset \mathbb{R}$ stejnoměrně konvergentní, právě když je tam **stejnoměrně cauchyovská**:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall m, n \in \mathbb{N} \geq n_0, \; \forall x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

VĚTA 3 (o záměně limity a derivace):

Nechť funkce z f_n mají vlastní derivace na $(a, b) \subset \mathbb{R}$, a nechť platí následující dva předpoklady:

(i) $\exists x_0 \in (a, b) : \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje

(ii) $f'_n \stackrel{\text{loc}}{\rightrightarrows} g$ na (a, b) (kde g je nějaká libovolná funkce)

Potom existuje na (a, b) funkce f, která má vlastní derivaci f', $f_n \stackrel{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ a $f'_n \stackrel{\text{loc}}{\rightrightarrows} f'$.

DŮKAZ:

Zvolíme předsedu vlády a $\varepsilon > 0$. Dále zvolíme $[c, d] \subset (a, b)$ takové, aby $x_0 \in [c, d]$, a označíme $f'_n \stackrel{\text{loc}}{\rightrightarrows} g[c, d]$.

Pak k předsedovi vlády a ε jistě:

$$\exists\, n_0,\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in [c,d] : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon \wedge |f_n'(x) - f_m'(x)| < \text{p.v.}$$

Potom pro $x \in [c,d]$ máme:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \overset{\triangle}{\leq} |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

Použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro $(f_0 - f_m)$ a zjistíme, že předchozí se rovná

$$|f_n'(\xi) - f_m(\xi)| \cdot |x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \qquad \xi \in (x, x_0) \vee (x_0, x)$$

$$\varepsilon|x - x_0| + \varepsilon \leq \varepsilon|d - c + 1| = K\varepsilon \qquad K > 0$$

Tudíž je posloupnost $\{f_n\}$ stejnoměrně cauchyovská:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0,\ \forall x : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[c,d]$ a $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na (a,b).

Víme, že $f_n' \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} g$ a $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$. Zbývá dokázat, že $f' = g$. Pro $x \in [c,d]$ máme

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} =$$

$$\overset{\text{V.2-}}{=} \lim_{n \to \infty} \lim_{h \to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \lim_{n \to \infty} f_n'(x) = g(x)$$

Q.E.D.

Poznámka:

Bez předpokladu (i) věta neplatí, jak je vidět na příkladu posloupnosti konstantních funkcí, která není bodově konvergentní, kupříkladu

$$f_n(x) \equiv (-1)^n \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$$

Derivace všech funkcí f_n jsou pak nulové, a tedy triviálně stejnoměrně konvergují. Tento problém zachrání předpoklad (i), tedy jakási konvergence v "záchytném bodě".

VĚTA 4 (stejnoměrná limita a newtonovsky derivovatelné funkce):

Mějme $f_n \in N(a,b)$, $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b). Potom také $f \in N(a,b)$ a platí, že

$$\lim_{n \to \infty} \text{(N)} \int_a^b f_n(x)\, dx = \text{(N)} \int_a^b f(x)\, dx$$

DŮKAZ:

$f_n \in N(a,b)$, tedy existuje primitivní funkce F_n, $F_n' = f_n$ na (a,b). Zvolíme $c \in (a,b)$ a dále volíme primitivní funkce tak, aby $F_n(c) = 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Potom platí:

- **(i)** $\{F_n(c)\}_{n=1}^{\infty}$ je nulová posloupnost, tedy je jistě konvergentní.
- **(ii)** $F_n' \rightrightarrows f$

Tudíž existuje F na (a,b) taková, že $F_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} F$, $F' = f$. Dále

$$\text{(N)} \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x \to b_-} \lim_{n \to \infty} F_n(x) - \lim_{x \to a_+} \lim_{n \to \infty} F_n(x) =$$

$$\overset{\text{V.2-}}{=} \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to b_-} F_n(x) - \lim_{x \to a_+} F_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \text{(N)} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Q.E.D.

VĚTA 5 (Dini):

Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní posloupnost spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $[a,b]$, která bodově konverguje ke spojité funkci. Potom $f_n \rightrightarrows f[a,b]$.

Důkaz: Neděláme. *Q.E.D.*

VĚTA 6 (Weistrass):

Nechť f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[a,b]$. Potom existuje posloupnost polynomů $\{P_n\}$ taková, že $P_n \rightrightarrows f$.

Důkaz: Nechceme. *Q.E.D.*

Pozn.: Předpoklad uzavřenosti intervalu potřebujeme, např. e^x nelze na $\mathbb{R}$ aproximovat polynomy.

Konvergence řad funkcí

Definice:

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definovaných na $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, **konverguje bodově** (**stejnoměrně**, **lokálně stejnoměrně**), jestliže posloupnost funkcí

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

konverguje příslušným způsobem.

Značíme $\sum f_n \to$, $\sum f_n \rightrightarrows$, $\sum f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$.

Máme-li limitní funkci f, značíme $\sum f_n \to f$, $\sum f_n \rightrightarrows f$, $\sum f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$.

VĚTA 7 (Weistrassovo kritérium):

Nechť f_n jsou definovány na $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, nechť

$$s_n := \sup_{x \in m} |f_n(x)| \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows \text{ na } M$$

DŮKAZ:

Zvolíme $\varepsilon > 0$, pak

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \sum_{n=n_0}^{\infty} s_n < \varepsilon$$

Nechť $m, n \geq n_0$, kde $m, n \in \mathbb{N}$; bez újmy na obecnosti nechť $m < n$. Tedy

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \overset{\triangle}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} s_k < \varepsilon$$

Tudíž posloupnost $\{\sum_{k=1}^{n} f_k\}$ je stejnoměrně cauchyovská na M, a tedy $\sum f_n \rightrightarrows$ na M.
Q.E.D.

VĚTA 8 (o záměně sumy a derivace):

Nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou definovány a mají vlastní derivace f_n' na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Nechť platí:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na (a, b)

(ii) $\exists\, x_0 \in (a, b)$ takový, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) < \infty$ (konverguje)

Potom $\sum f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na (a, b) a navíc $(\sum f_n)' = \sum f_n'$ na (a, b).
Důkaz: Přímý důsledek V.3- a definice konvergence řady. *Q.E.D.*

VĚTA 9 (o záměně sumy a integrálu):

Nechť $f_n \in N(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a nechť $\sum f_n \rightrightarrows$ na (a,b). Pak limitní funkce $f := \sum f_n$ splňuje $f \in N(a,b)$ a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Důkaz: Přímý důsledek V.4-. *Q.E.D.*

VĚTA 10 (Abelovo kritérium):

Nechť $\sum f_n(x) \rightrightarrows$ na M, nechť $\{g_n\}$ je **stejnoměrně omezená** na M:

$$\exists\, K > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in M : |g_n(x)| \le K$$

Nechť $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je navíc pro každé pevné $x \in M$ monotónní (buď nerostoucí nebo neklesající, dokonce v každém x jinak).

Potom $\sum f_n g_n \rightrightarrows$ na M.

NÁZNAK DŮKAZU:

Definujme si pro $N \in \mathbb{N}$:

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

$$t_N(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$$

$$f_n g_n = -t_n(g_n - g_{n+1}) + t_{n-1} g_n - t_n g_{n+1}$$

($\langle$cvičení$\rangle$; Abelova parciální sumace)

$$\sum_{n=M}^{N} f_n g_n = \sum_{n=M}^{N} -t_n(g_n - g_{n+1} + t_{M-1} g_M - t_N g_{N+1}$$

$$\left| \sum_{n=M}^{N} f_n g_n \right| \overset{\triangle}{\le} \sum_{n=M}^{N} |t_n||g_n - g_{n+1}| + |t_{M-1}||g_M| + |t_N||g_{N+1}|$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu $\exists\, N_0$ tak, aby pro $\forall N \ge N_0$ bylo $|t_N| < \varepsilon$. Navíc víme, že $|g_N| \le K$ pro $\forall N \in \mathbb{N}$.

$$\overset{M,N \ge N_0}{\Longrightarrow} \left| \sum_{n=M}^{N} f_n g_n \right| \le \sum_{n=M}^{N} \varepsilon |g_n - g_{n+1}| + \varepsilon K + \varepsilon K$$

$g_n(x)$ je monotónní, tedy (!)

$$\sum_{n=M}^{N} |g_n(x) - g_{n+1}(x)| = |g_{N+1}(x) - g_M(x)|$$

(Tvrdím, že sčítám-li jednotlivé rozdíly, je to stejné, jako kdybych odečetl nejvyšší od nejnižšího. To samozřejmě platí, pouze mám-li monotonii.)

$$\Longrightarrow \left| \sum_{n=M}^{N} f_n g_n \right| \le \varepsilon\left(|g_{N+1}| + |g_M|\right) + 2\varepsilon K \le \varepsilon(K+K) + 2\varepsilon K = 4\varepsilon K \overset{(s \to 0_+)}{\longrightarrow} 0$$

Tedy $\sum$ je stejnoměrně Bolzano-Cauchyovská, tudíž $\sum \rightrightarrows$.

Q.E.D.

VĚTA 11 (Dirichletovo kritérium):

Nechť $\{f_n\}$ má stejnoměrně omezené částečné součty (tj. posloupnost

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

je stejnoměrně omezená) na $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Nechť $g_n \rightrightarrows 0$ na M. Nechť $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je navíc pro každé pevné $x \in M$ monotónní (na typu monotonie opět nezáleží).

Potom $\sum f_n g_n \rightrightarrows$ na M.

NÁZNAK DŮKAZU:

Definujme si pro $N \in \mathbb{N}$

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

(ale t_N nemáme).

$$f_n g_n = s_n(g_n - g_{n+1}) - s_{n-1}g_n + s_n g_{n+1}$$

($\langle$cvičení$\rangle$; Abelova parciální sumace)

$$\left|\sum_{n=M}^{N} f_n g_n\right| \leq \sum_{n=M}^{N} |s_n||g_n - g_{n+1}| + |s_{M-1}||g_M| + |s_N||g_{N+1}|$$

$$\left.\begin{aligned} |s_N| &\leq K \\ |g_N| &< \varepsilon \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} &\leq K\sum_{n=M}^{N} |g_n - g_{n+1}| + K\varepsilon + K\varepsilon \\ &\leq K(|g_M| + |g_{N+1}|) + K\varepsilon + K\varepsilon \leq 4K\varepsilon \end{aligned}$$

atd.

Q.E.D.

Příklad:

Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ na $\mathbb{R}$ a tam, kde konverguje, řady sečtěte.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje tato řada bodově? x vezmeme pevné, pak pan Cauchy říká:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}} = x^2$$

Tedy řada konverguje pro $|x| < 1$ a diverguje pro $|x| > 1$. A když $x = \pm 1$?

$$x = \pm 1 \Longrightarrow \sum f_n(x) = \pm \sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

konverguje dle Leibnize.

Tudíž $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konverguje **bodově** pro $x \in [-1, 1]$.

Spočítáme derivace:

$$f_n'(x) = (-1)^n x^{2n} = \left(-x^2\right)^n \qquad x \in (-1,1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in (-1,1)$$

Je tato konvergence lokálně stejnoměrná? Pak by platilo $\sum f_n'(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $(-1,1)$, tedy $\sum f_n'(x) \rightrightarrows$ na $[-\delta,\delta]$ pro $\forall \delta \in (0,1)$. Nechť $\delta \in (0,1)$, pak

$$\sup_{x\in[-\delta,\delta]} |f_n'(x)| = \sup_{x\in[-\delta,\delta]} \left|\left(-x^2\right)^n\right| = \delta^{2n} =: s_n$$

a jasně $\sum s_n < \infty$.

Takže dle Weistrassova kriteria $\sum f_n' \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $(-1,1)$. Vezmeme si nějaký záchytný bod, např. $x=0$: $\sum f_n(0) = 0$. A dle V.8- pak $\sum f_n \rightrightarrows$ na $(-1,1)$ a $\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$.

Označíme

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad x \in [-1,1]$$

Pak pro $x \in (-1,1)$:

$$f'(x) = \left(\sum f_n(x)\right)' \overset{\text{V.8-}}{=} \sum f_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \operatorname{arctg} x + c \ \ \textit{(Taylor)}$$

$$f(0) = 0 \Longrightarrow 0 = \operatorname{arctg} 0 + c \Longrightarrow c = 0$$

Závěr

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \operatorname{arctg} x \text{ na } (-1,1)$$

Je tato konvergence stejnoměrná na $[-1,1]$ **nebo není?** Zvolme

$$f_n(x) \equiv (-1)^n, \ \left|\sum f_n(x)\right| \le 1$$

a dejme šanci panu Dirichletovi:

$$g_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Longrightarrow |g_n(x)| \le \frac{1}{2n+1} \to 0 \Longrightarrow g_n \rightrightarrows 0 \text{ na } [-1,1]$$

Tedy podle Dirichletova kritéria

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \rightrightarrows \operatorname{arctg} x \qquad x \in [-1,1]$$

Nyní se pokusme řadu sečíst.
Pan Euler (1735) vymyslel hezkou formulku

$$x = 1 : \pi/4 = \operatorname{arctg} 1 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 \cdots,$$

ta je ale velmi pomalá, teprve 300 členů dá alespoň aproximaci 22/7, ke které došel 2000 let před tím Archimédes.

Existuje ale hezký vzorec:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/2 \cdot 1/3} = 1$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 1/2 + \operatorname{arctg} 1/3$$

Vyjde nám tedy mnohem rychlejší formule:

$$\pi/4 = (1/2 + 1/3) - 1/3(1/2^3 + 1/3^3) - 1/5(1/2^5 - 1/3^5) + \cdots$$

Příklad:

Typické využití Dirichletova kritéria:

(i) $f_n \equiv (-1)^n$
(ii) $f_n(x) = \sin(nx)$

Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$, $\alpha \in (0, \infty)$, $x \in (0, 2\pi)$.
Zvolme $f_n(x) = \sin(nx)$, pak elementární trigonometrií a indukcí:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$x \in [\delta, 2\pi - \delta], \delta \in (0, \pi) : \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq \frac{1}{\sin(\delta/2)}$$

(stejnoměrná omezenost)
$g_n(x) \equiv 1/n^\alpha \rightrightarrows 0$, tedy dle Dirichleta:

$$\sum \frac{\sin(nx)}{n^\alpha} \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \text{ na } (0, 2\pi)$$

Pozn.: Z Weistrasse lze toto dostat pouze pro $\alpha > 1$, tedy je Dirichlet v tomto případě lepší.

Mocninné řady

Definice:

Řadu funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad x_0 \in \mathbb{R},\ a_n \in \mathbb{R}$$

nazýváme **mocninnou řadou** se **středem** v bodě x_0 a **koeficienty** a_n.*

Zajímá nás, zda, kde, jak a kam mocninná řada konverguje.
Pozorování: Každá mocninná řada konverguje pro $x = x_0$ (tj. ve svém středu).
Odpověď na otázku, zda řada konverguje, případně kde, nám dá *oblast konvergence* M, ve které $x_0 \in M$.
Jak mocninná řada konverguje? Bodově, stejnoměrně, lokálně stejnoměrně či absolutně.
A kam konverguje?

$$\exists\, f(x) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\ ?$$

V některých případech je řada vytvořena nějakou funkcí. Např. Taylorův polynom:

$$T_{x_0}^{f,n}(x) = \sum \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

dále třeba Fourierova řada (bude), Martaminova řada (nebude), Bersteinovy polynomy (také nebudou).

VĚTA 1 (o existenci a jednoznačnosti poloměru konvergence mocninné řady):

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada. Pak

$$\exists!\, R \in [0,\infty]$$

(pozor, R může být i nekonečno) takové, že řada konverguje pro $\forall x$ takové, že $|x-x_0| < R$, a diverguje pro $\forall x$ takové, že $|x-x_0| > R$. Co se děje v krajních hodnotách, nevíme — tam se může stát cokoliv.

DŮKAZ:

$$R := \sup\{|y-x_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-x_0)^n \text{ konverguje}\}$$

Nechť $|x-x_0| < R$. Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x-x_0|^n$$

a protože $|x-x_0| < R$, existuje y takové, že

$$|y-x_0| > |x-x_0| \quad \wedge \quad |y-x_0| < R \quad \wedge \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-x_0)^n \text{ konverguje}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x-x_0|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||y-x_0|^n \left(\frac{|x-x_0|}{|y-x_0|}\right)^n$$

* Zde používáme konvenci $0^0 := 1$

Protože řada $\sum a_n(y-x_0)^n$ konverguje,

$$\exists\, K : |a_n||y-x_0|^n \le K$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x-x_0|^n \le K \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x-x_0|}{|y-x_0|}\right)^n$$

Protože však $\dfrac{|x-x_0|}{|y-x_0|} < 1$, jde o konvergentní geometrickou řadu.

Nechť $|x-x_0| > R$. Z definice R plyne, že x diverguje.
Jednoznačnost R plyne z jednoznačnosti suprema.
Q.E.D.

VĚTA 2 (o výpočtu poloměru konvergence):

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in [0,\infty]$. Potom

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

DŮKAZ:

Označme si

$$R^* := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Budeme dokazovat, že řada konverguje pro $|x-x_0| < R^*$ a diverguje pro $|x-x_0| > R^*$, tedy že $R^* = R$. Jakmile toto dokážeme, tvrzení vyplyne z jednoznačnosti R, dokázané v V.1-.
Nechť $R^* \in (0,\infty)$. Dále nechť $|x-x_0| < R^*$. Potom

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^n} = |x-x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-x_0|}{R^*} < 1$$

Dle Cauchyova kritéria řada (čísel) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje.
Nechť $|x-x_0| > R^*$. Pak

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^n} > 1$$

a tedy opět dle Cauchyho $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ diverguje.
Případy $R^* = 0$ a $R^* = \infty$ odbobně (⟨cvičení⟩).
Q.E.D.

Příklady:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
Střed je v $x_0 = 0$, poloměr

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n!}} = 1/0 = \infty$$

(z konvence *(pouze v této pasáži)* $1/0 = +\infty$ a $1/\infty = 0$).
Tedy tato řada konverguje (bodově) pro $\forall x \in \mathbb{R}$ k funkci $\exp x$.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n(x-1)^n$

$$x_0 = 1$$
$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n}} = 1/\infty = 0$$

Řada konverguje jen pro $x = 1$.

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg}(2n)(x-3)^n$

$$x_0 = 3$$
$$R = 1$$

Řada konverguje pro $x \in (2,4)$, diverguje pro $x \in \mathbb{R} \setminus [2,4]$.
V bodech $x = 2$, $x = 4$ řada diverguje (arctg rychle odkonverguje někam vysoko nad nulu).
Tedy řada konverguje pro $x \in (2,4)$.

(iv) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+e)^n}{\log n}$

$$x_0 = -e$$
$$\sqrt[n]{1/\log n} \in \left(\sqrt[n]{1/n},\ \sqrt[n]{1}\right) \Rightarrow R = 1$$

Konverguje pro $x \in (-e-1, -e+1)$.
V bodě $x = -e-1$: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$ konverguje, Leibniz.
V bodě $x = -e+1$: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ diverguje, srovnání s harmonickou.
Tedy řada konverguje pro $x \in [-e-1, -e+1)$.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{2n}$

$$x = 0$$
$$a_m = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n 2^{2n}}{2n} & m = 2n,\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & m = 2n+1,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{2^{2n}}{2n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[2n]{2n}} = 2$$

Tedy $R = 1/2$, řada konverguje pro $x \in (-1/2, 1/2)$.
V bodech $x = \pm 1/2$: $\sum \frac{(-1)^n}{2n}$ konverguje dle Leibnize, tudíž řada konverguje pro $x \in [-1/2, 1/2]$.

Otázka: Jak vyšetořovat stejnoměrnou (lokálně stejnoměrnou) konvergenci mocninných řad?

VĚTA 3 (o lokálně stejnoměrné konvergenci mocninné řady):

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0,\infty]$. Potom řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ je-li $R < \infty$ a na intervalu $\mathbb{R}$, je-li $R = +\infty$.

DŮKAZ:

Stačí dokázat, že $\sum \rightrightarrows$ na každém intervalu $[x_0 - K, x_0 + K]$, kde $K \in (0, R)$.
Mějme tedy $K \in (0,R)$, pak

$$\sup_{x\in[x_0-K, x_0+K]} |a_n||(x-x_0)^n| = |a_n|K^n$$

ale $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|K^n$ konverguje (viz důkaz V.1-).
Tedy dle Weistrassova kriteria $\sum \rightrightarrows$ na $[x_0 - K, x_0 + K]$.
Q.E.D.

VĚTA 4 (o derivaci mocninné řady):

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0,\infty]$. Potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

je také mocninná, se stejným středem i poloměrem konvergence, a navíc

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \qquad x \in (x_0-R, x_0+R)$$

DŮKAZ:

Nechť R' je poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$, pak

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \overset{\text{VOAL}}{=} 1 \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

a tedy $R' = R$. Zároveň díky tomu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \text{ na } (x_0-R, x_0+R) \text{ \textit{(viz předchozí věta)}}$$

a v záchytném bodě $x = x_0$ konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Tedy dle věty o záměně sumy a derivace

$$\left(\sum a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum a_n n (x-x_0)^{n-1}$$

Q.E.D.

VĚTA 5 (o integraci mocninné řady):

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R \in (0,\infty]$. Potom

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) dx = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \qquad x \in (x_0-R, x_0+R)$$

Důkaz: Nechceme. *Q.E.D.*

VĚTA 6 (Abelova):

Nejdůležitější věta pasáže.

Nechť má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se středem $x_0 = 0$ poloměr konvergence $R \in (0,\infty)$. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows \text{ na } [0,R]$$

$$! \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x\to R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad !$$

DŮKAZ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n (x/R)^n$$

Řada $\sum a_n R^n$ konverguje, tedy také $\sum a_n R^n \rightrightarrows$. Dále $|(x/R)^n| \le 1$, a navíc je $(x/R)^n$ monotónní (v n) pro každé x. Podle Abelova kritéria tedy $\sum a_n x^n \rightrightarrows$.

Vzorec s limitou plyne ihned z Moore-Osgoodovy věty.

Q.E.D.

Příklady:

(i) Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$

Zaveďme si umělou proměnnou x. Definujeme řadu (funkcí)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

To je mocninná řada s poloměrem konvergence $R = 1$. Pro $x = R$ řada konverguje (Leibniz). Tedy dle Abelovy věty

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

a tato funkce splňuje

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \qquad x \in (-1, 1)$$

a navíc platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \to 1_-} f(x)$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{dx}{1+x} = \log(1+x) + c$$

a zbývá dopočítat c:

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot 0^n = 0 \Longrightarrow \log(1+0) + c = 0 \Longrightarrow c = 0$$

$$\Longrightarrow f(x) = \log(1+x)$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \to 1_-} f(x) = \log 2$$

(ii) Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n!} =: s$

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n!}$$

Definujme si:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n!} x^n$$

Pak dle V.5- pro $F(x) = \int f(x)\,dx$ platí

$$F(x) = c + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n!} = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n!} = c - x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = c - xe^{-x}$$

$$F'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x} = f(x)$$

a tedy dle Abelovy věty

$$s = \lim_{x \to 1_-} f(x) = 0$$

Cvičení: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e$

Fourierovy řady

Fyzikální motivace

Rovnice vedení tepla nám říká, že vezmeme-li si třeba měděnou tyč, která má na jednom konci teplotu $0°C$ a na druhém konci ji zahříváme kahanem na $100°C$, a nás zajímá, jak vypadá funkce $T(x,t)$.

To vede na hledání f takové, aby $f'' = -f$ (např. $\sin x$, $\cos x$).

Je výhodné řešení hledat ve tvaru řady, ale ta řada není mocninná. Místo mocnin x^n pracuje s funkcemi $\sin(nx)$ a $(\cos(nx)$.

> Koupím si pizzu, hodím ji do trouby. V $t = 8^{00}$ bude mít $T = 110°C$. Kdy bude $T = 60°C$?
> V $t = 18^{00}$ nastane smrt hlady. Je třeba se spálit?
> Mějme čas t, teplotu T. Teplota místnosti je $T_0 = 20$. k je materiálová konstanta.
>
> $$t = 0 : T(t) = T(0) = 110°$$
> $$t = 5 : T(t) = T(5) = 90°$$
>
> Newton:
>
> $$-\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_0)$$
> $$\int \frac{dT}{T - T_0} = \int -k\, dt)$$
> $$\log(T - T_0) = -kt + c$$
> $$T - T_0 = e^c e^{-kt} =: Ae^{-kt}$$
>
> Nevím, co je k a A:
>
> $$T(t) = T_0 + Ae^{-kt}$$
>
> Dosadíme:
>
> $$t = 0 : \ 110 = 20 + Ae^0 \quad \Rightarrow A = 90 \quad T = 20 + 90e^{-kt}$$
> $$t = 5 : 80 = 20 + 90e^{-k5} \Rightarrow 2/3 = e^{-5k} \quad e^{-k} = \sqrt[5]{2/3}$$
> $$\Longrightarrow T(t) = 20 + 90(2/3)^{t/5}$$
>
> $$t = 10 : T(10) \leq 60??$$
> $$20 + 90(2/3)^2 = 20 + 40 = 60$$
>
> To bylo o fous.

Potíž s tyčí je ta, že musíme derivovat parciálně, neboť máme dvě proměnné. Vše se povážlivě komplikuje a na pomoc spěchá právě pan Fourier.

Jean–Baptiste Joseph Fourier (1768—1830) v roce 1822 vymyslel Fourierovy řady. Euler totiž pracoval se systémem funkcí $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$, ale Fourier si řekl, že by se mu hodil spíše trigonometrický systém $\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$.

Otázka:

Je-li dáno f, chceme najít čísla a_n, b_n tak, aby řada

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

konvergovala (nejlépe stejnoměrně) k funkci f.

Definice:

Funkce f se nazývá 2π**-periodická**, jestliže

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x + 2\pi) = f(x)$$

Množinu 2π-periodických funkcí značíme $P_{2\pi}$.
Řadu funkcí tvaru

$$a_0/2 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \cdots = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

nazýváme **trigonometrickou řadou**. Čísla $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ pak nazýváme **koeficienty trigonometrické řady**.

Poznámka:

Jestliže trigonometrická řada bodově konverguje k funkci f, tj.

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

potom nezbytně $f \in P_{2\pi}$.

Výpočet koeficientů

Budeme porovnávat systémy pro mocninnou řadu $\{1, x, x_2, \ldots\}$ a pro trigonometrickou řadu $\{1, \cos x, \sin x, \ldots\}$.
Jak hledat koeficienty? Předpokládejme, že

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \qquad x \in \mathbb{R}$$

a nechť řada konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

Pozorování:

Takový trigonometrický systém je *ortogonální* (funkce jsou na sebe kolmé).

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \vee n = 0 : \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx)\, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx)\, dx = \begin{cases} \pi & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx)\, dx = \begin{cases} \pi & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

(a_0) Integrujeme $f(x)$ od $-\pi$ do π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx}_{0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx}_{0} \right) = a_0 \pi$$

$$\Longrightarrow a_0 = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$(a_m,\ m \geq 1)$ Vynásobíme $f(x)\cos(mx)$ a integrujeme od $-\pi$ do π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = a_0/2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,dx}_{0} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx}_{a_m\pi} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)\,dx}_{0}\right)$$

$$\Longrightarrow a_m = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$$

$(b_m,\ m \geq 1)$ Obdobně jako a_n:

$$b_m = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx$$

Definice:

Nechť f je 2π-periodická a Riemannovsky integrovatelná:

$$f \in P_{2\pi} \cap R([-\pi,\pi])$$

Pak čísla $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_0 = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

nazýváme **Fourierovými koeficienty funkce** f. Řadu

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

pak nazýváme **Fourierovou řadou** f.

Řekneme, že $f \in P_{2\pi}$ je **po částech hladká** ($f \in c_{2\pi}$), jestliže existuje konečně mnoho bodů

$$-\pi \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_m < \pi$$

takových, že na intervalech (x_i, x_{i+1}) jsou f i f' spojité a v bodech $x_1, \ldots, x_m$ existují jednostranné limity funkcí f i f'.

f je **po částech spojitá**, jestliže existují body $x_0, \ldots, x_n \in [-\pi, \pi)$, tak, že f je spojitá na (x_j, x_{j+1}) a má jednostranné limity $\lim_{y\to x_{j\pm}} f(y)$.

Pozn.: Pokud $f \in c_{2\pi}$, pak f' je po částech spojitá.

VĚTA 1 (Besselova nerovnost):

Nechť $f \in c_{2\pi}$, a_n, b_n její Fourierovy koeficienty. Potom platí

$$a_0^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$$

DŮKAZ:

Označíme

$$s_n(x) := a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

Zřejmě platí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 \, dx \geq 0$$

$$2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)^2 \, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$$

Přitom platí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) \, dx = a_0/2 \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\pi a_0} \, dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos(kx)}_{\pi a_k} \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin(kx)}_{\pi b_k} \, dx + \right) =$$

$$= \pi \left(a_0^2/2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)$$

Analogicky platí (⟨cvičení⟩) také:

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)^2 \, dx = \pi \left(a_0^2/2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

Tedy nutně:

$$\pi \left(a_0^2/2 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx \right)$$

Q.E.D.

VĚTA 2 (Riemannovo–Lebesgueovo lemma):

Nechť $f \in c_{2\pi}$, a_n, b_n její Fourierovy koeficienty. Pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

a speciálně

$$\lim_{n\to\infty} 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx = \lim_{n\to\infty} 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} fx) \sin(nx) \, dx = 0 \qquad \forall f \in c_{2\pi}$$

Důkaz: Přímý důsledek V.1-. *Q.E.D.*

Poznámka:

Pro věty 1 a 2 je předpoklad $f \in c_{2\pi}$ zbytečně silný, stačí předpokládat, že $f^2 \in R[-\pi,\pi]$. Tedy máme:

VĚTA 1 ():

$$f \in P_{2\pi} \wedge f^2 \in R[-\pi,\pi] \Rightarrow$$
$$a_0^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$$

VĚTA 2 ():

$$f \in P_{2\pi} \wedge f^2 \in R[-\pi,\pi] \Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Poznámka:

Riemannovo–Lebesgueovo lemma ve skutečnosti tvrdí, že

$$f \in R[-\pi,\pi] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

LEMMA:

$$1/2 + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin x/2} \qquad x \neq 2k\pi$$

Důkaz: Jednoduše indukcí.

Důsledek:

$$1/\pi \int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin t/2} \, dt = 1/\pi \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin t/2} \, dt = 1/2$$

Značení:

Máme f, pak Fourierovu řadu značíme

$$S(f,x) := a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$S_n(f,x) := a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Připomeňme si, že

$$a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dx$$
$$b_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dx$$

$$f(x+0) := \lim_{y\to 0_+} f(x+y)$$

$$f(x-0) := \lim_{y\to 0_+} f(x-y)$$

Pro $f \in P_{2\pi}$ definuji $f^*(x) := \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Poznámky:

(i) f spojitá v $x \Rightarrow f(x) = f^*(x)$

(ii) f má "skok" v $x \Rightarrow f^*(x)$ je aritmetickým průměrem limit zleva a zprava (bez ohledu na hodnotu).

Nesmyslný vzorec:

$$\frac{f(x+0)}{2} = 1/\pi \int_0^\pi \frac{f(x+0)}{2\sin t/2} \sin((n+1/2)t)\, dt$$

$$\frac{f(x-0)}{2} = 1/\pi \int_{-\pi}^0 \frac{f(x-0)}{2\sin t/2} \sin((n+1/2)t)\, dt$$

VĚTA 3 (o bodové konvergenci Fourierovy řady):

$$f \in c_{2\pi} \Rightarrow S(f,x) = f^*(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Tedy Fourierova řada po částech hladké funkce konverguje *bodově* na celém $\mathbb{R}$ k výrazu

$$f^*(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned}
S_n(f,x) &= 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ 1/2 + \sum_{k=1}^{n} (\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx)) \right\} dt \\
&= 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ 1/2 + \sum_{k=1}^{n} \cos(k(t-x)) \right\} dt \ \ \textit{(trigonometrie)} \\
&= 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ 1/2 + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) \right\} dt \ \ \textit{(substituce a } 2\pi\textit{-peridodicita)} \\
&= 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin t/2}\, dt \ \ \textit{(lemma)}
\end{aligned}$$

$$S_n(f,x) - f^*(x) \overset{\text{NV}}{=} 1/\pi \int_{-\pi}^{0} \frac{f(x+t)-f(x-0)}{2\sin t/2} \sin((n+1/2)t)\, dt +$$

$$+1/\pi \int_{0}^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin t/2} \sin((n+1/2)t)\, dt$$

Označíme

$$G(t) := \begin{cases} \dfrac{f(x+t)-f(x-0)}{2\sin t/2} & t \in [-\pi, 0) \\ 0 & t = 0 \\ \dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin t/2} & t \in (0, \pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_n(f,x) - f^*(x) = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} G(t)\sin((n+1/2)t)\,dt$$

$$= 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{G(t)\sin(t/2)}_{\substack{\text{po částech}\\ \text{spojitá?}}} \cos(nt)\,dt + 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{G(t)\cos(t/2)}_{\substack{\text{po částech}\\ \text{spojitá?}}} \sin(nt)\,dt$$

Chci dokázat, že G je po částech spojitá. K tomu stačí dokázat existenci $G(0+0)$, $G(0-0)$.

$$G(0+0) = \lim_{t\to 0_+} G(t) \overset{\text{L'H } \text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=} \frac{\lim_{t\to 0_+} f'(x+t)}{\lim_{t\to 0_+} 2\cos(t/2)\cdot 1/2} = f'(x+0) \;\; \textit{(víme, že existuje)}$$

$$G(0-0) = f'(x-0)$$

Tedy G je po částech spojitá, tudíž také $G(t)\sin(t/2)$, $G(t)\cos(t/2)$ jsou po částech spojité. Tedy jejich druhá mocnina je $\in R[-\pi,\pi]$ a podle V.2- jejich Fourierovy koeficienty jdou k nule.

$$\lim_{n\to\infty} (S_n(f,x) - f^*(x)) = 0$$

Q.E.D.

VĚTA 4 (o stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady):

$$f \in c_{2\pi} \wedge \text{ spojitá na } \mathbb{R} \implies S(f,x) \rightrightarrows f(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

DŮKAZ:

Protože

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \le |a_n| + |b_n|$$

stačilo by dokázat, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \text{ konverguje}$$

neboť pak by tvrzení plynulo z Weistrassova kritéria.

Víme, že f' je definovaná (a spojitá) všude kromě konečně mnoha bodů v $[-\pi,\pi)$. Je tak po částech spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy

$$(f')^2 \in R[-\pi,\pi]$$

Nechť α_n, β_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f', tedy

$$\alpha_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx \overset{\text{per partes}}{=} \underbrace{1/\pi[f(x)\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi}}_{0} - 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-n\sin(nx))\,dx$$

$$= n/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = nb_n$$

a obdobně

$$\beta_n = -na_n$$

Z Besselovy nerovnosti pro f' máme

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_n^2) \leq 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2\, dx < \infty$$

Víme, že

$$\sum(\alpha n^2 + \beta n^2) < \infty \qquad \alpha_n = nb_n, \beta_n = -na_n$$

a chceme

$$\sum(|a_n| + |b_n|) < \infty$$

Tedy jest:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|/n + |\beta_n|/n) \overset{\text{(na dluh)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|/n + \sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|/n$$

Do hry konečně po mnoha měsících přichází dávná Cauchyova nerovnost:

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2\right)^{1/2} < \infty$$

Q.E.D.

VĚTA 5 (o lokálně stejnoměrné konvergenci Fourierovy řady):

Nechť $f \in c_{2\pi}$, pak její Fourierova řada konverguje bodově k f^*. Tato konvergence je lokálně stejnoměrná na každém intervalu (α, β), na kterém je f spojitá.
Důkaz: Bez. *Q.E.D.*

Příklad:

$$f(x) = \pi - x \qquad x \in [-\pi, \pi)$$

2π-periodické rozšíření: $f(x) = \pi - (x + 2k\pi) \qquad x \in [(2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$

$$f \in c_{2\pi} \Rightarrow \underbrace{s(f,x)}_{0} \to f^*(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 2k\pi \\ \pi & x = 2k\pi \end{cases}$$

Cvičení:

$$a_0 = 2\pi,\ a_n = 0,\ n \geq 1,\ b_n = \frac{2(-1)^n}{n}$$

$$S(f,x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)$$

$$= \pi - 2\sin x + \sin(2x) - 2/3\sin(3x) + \cdots$$

VĚTA 6 (o derivování Fourierovy řady):

Nechť $f \in P_{2\pi}$ a má Fourierovy koeficienty $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dále nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|)$$

konverguje. Potom $f \in c^1$ (tj. má spojitou derivaci) a řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\cos(nx)b_n - \sin(nx)a_n) \rightrightarrows f' \text{ na } \mathbb{R}$$

DŮKAZ:

$$f_n(x) := a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$
$$f_n'(x) = n(b_n \cos(nx) - a_n \sin(nx))$$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n'(x)| \leq n(|a_n| + |b_n|) =: s_n$$

přičemž $\sum s_n < \infty$ (z předpokladu). Tedy dle Weistrassova kritéria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$.

$$g := \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Navíc pro pevný bod $x = 0$ platí

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)\right| = \left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n| < \infty$$

Tedy dle věty o záměně sumy a derivace $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$, protože ale $f \in P_{2\pi}$, tak $\sum f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$ a navíc $f' = g$.

Q.E.D.

Poznámka:

Je-li f sudá, $b_n = 0$ a $a_n = 2/\pi \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$.
Je-li f lichá, $a_n = 0$ a $b_n = 2/\pi \int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$.
Fourierovy koeficienty se tedy krásně počítají, je-li funkce symetrická.

Metrické prostory

Úvod

Motivace

Máme neprázdnou množinu P *(množinu čehokoliv — může jít o množinu všech žiraf v Maďarsku, množinu všech pravdivých výroků Stanislava Grosse — nebo i něco většího)*, mezi jejímiž objekty chceme měřit vzdálenost.

Definice:

Buď P neprázdná množina a $\varrho\colon P \times P \to [0,\infty)$. Jestliže platí:

(i) $\varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ $\qquad \forall x,y \in P$

(ii) $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$ *(symetrie)* $\qquad \forall x,y \in P$

(iii) $\varrho(x,y) \le \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$ *(trojúhelníková nerovnost)* $\qquad \forall x,y \in P$

Potom ϱ je **metrika** na P a (P,ϱ) nazýváme **metrickým prostorem**.

Cvičení: Je v metrickém prostoru nádraží cena lístku metrikou? ⟨cvičení⟩

Příklady:

(i) $P = \mathbb{R}$, $\varrho = \varrho_{\text{eukl.}}(x,y) := |x-y|$

(ii) $P \subset \mathbb{R}$, $\varrho = \varrho_{\text{eukl.}}(x,y)$ (podprostor se zděděnou metrikou)

(iii) $P = \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ x_j \in \mathbb{R},\ j = 1,\dots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$

(a) $P = \mathbb{R}^n$, $\varrho = \varrho_{\text{eukl.}}(x,y) := \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(y_j - x_j)^2}$

(i) a (ii) triviální. Dokažme si (iii):

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(y_j - x_j)^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(z_j - y_j)^2}$$

Označme $a_j := x_j - z_j$, $b_j := z_j - y_j$, tedy chci

$$\sqrt{\sum (a_j + b_j)^2} \le \sqrt{\sum a_j^2} + \sqrt{\sum b_j^2}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum (a_j + b_j)^2} &= \sqrt{\sum a_j^2 + 2\sum a_j b_j + \sum b_j^2} \\ &\overset{\text{Cauchy}}{\le} \sqrt{\sum a_j^2 + 2\sqrt{\sum a_j^2}\sqrt{\sum b_j^2} + \sum b_j^2} = \sqrt{\sum a_j^2} + \sqrt{\sum b_j^2}\end{aligned}$$

(b) newyorkská metrika: $\varrho_{\text{NY}}(x,y) := \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$

(c) maximová metrika: $\varrho_{\max}(x,y) := \max_{j=1,\dots,n} |x_j - y_j|$

(d) "ruská" metrika: mějme $a \in P$, $\varrho_{\text{pamp.}}(x,y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ \varrho(x,a) + \varrho(a,y) & x \ne y \end{cases}$

(iv) $P = C[a,b] = \{f \text{ definovaná a spojitá na } [a,b]\}$

(a) integrální metrika: $\varrho_{\text{int}}(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$

(b) supremální metrika: $\varrho_{\sup}(f,g) := \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$

Z obrázku vyplývá, že $\varrho_{\text{int}}(f,g) \le (b-a)\varrho_{\sup}(f,g)$

(v) diskrétní metrika: P je cokoliv, $\varrho_{\text{diskr.}}(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \ne y \end{cases}$

Definice:

(P,ϱ) buď metrický prostor, $x \in P$, $r > 0$. Pak **otevřenou koulí** se středem x a poloměrem r rozumíme množinu

$$B(x,r) := \{y \in P : \varrho(x,y) < r\}$$

Obdobně definujeme **uzavřenou kouli** jako

$$\overline{B}(x,r) := \{y \in P : \varrho(x,y) \le r\}$$

Pozor, např. když $P = [0,1]$, $x = 1/4$, $r = 1/2$, pak $B(x,r) = B(1/4, 1/2) = [0, 3/4)$!

Příklady:

Mějme $P = \mathbb{R}^2$, $x = [0,0]$, $r = 1$ (jednotková koule se středem 0: $B([0,0],1)$).
Spousta obrázků…

(1) $\varrho_{\text{eukl.}}$: kolečko

(2) ϱ_{NY}: kosočtverec

(3) $\varrho_{\max}$: čtvereček

(4) $\varrho_{\text{diskr.}}$: $B(x,r) = \begin{cases} \{x\} & r \le 1 \\ P & r > 1 \end{cases}$

(5) $\varrho_{\text{pamp.}}$: $\langle$cvičení$\rangle$

Mějme $P = C[a,b]$, f, $r > 0$.

(1) $\varrho_{\sup}$: r-ový pásek kolem funkce, všechny funkce, které z něj nevylezou

(2) ϱ_{int}: nelze nakreslit

Definice:

(P,ϱ) buď metrický prostor a $G \subseteq P$. Řekneme, že G je **otevřená v** P, pokud

$$\forall x \in G\ \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq G$$

Naopak G je **uzavřená v** P, pokud $P \setminus G$ je otevřená.

DŮKAZ:

(i) zřejmé

(ii) $F \supset B$, F uz., tedy $F \supset A \Rightarrow \bigcap\limits_{F \supset B} F \supset \bigcap\limits_{F \supset A} F$

(iii) $\overline{A}$ je uz. a $A \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(iv)

(“$\subseteq$”)

Konvergence v metrických prostorech

Definice:

Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v P. Řekneme, že x_n **konverguje** k $y \in P$, neboli x_n má limitu y, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y) = 0$$

Značíme:

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y \quad$ (v P)
- $x_n \to y$

Příklady:

(i) Pro $(P,\varrho) = (\mathbb{R}, |x-y|)$ je konvergence totožná s konvergencí posloupnosti reálných čísel, jak ji známe ze zimního semestru.

(ii) V prostoru $C[a,b]$ se supremovou metrikou

$$\varrho_{\sup}(f,g) := \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

je konvergence posloupnosti funkcí ekvivalentní stejnoměrné konvergenci na $[a,b]$ (jak vyplývá z V7.1-).

VĚTA 4 (vlastnosti konvergence v metrickém prostoru):

Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, pak platí:

(i) $\exists\, n_0\ \forall n \geq n_0 : x_n = y \in P \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$

(ii) $x_n \to y_1 \wedge x_n \to y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$ (limita je určena jednoznačně)

(iii) Nechť $\{x_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost z $\{x_n\}$ a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y \in P$.
Pak také $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = y$.

(iv) Nechť $F \supset P$ je uzavřená, nechť $\{x_n\} \subset F$, a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y \in P$. Potom $y \in F$.

DŮKAZ:

(i) $\varrho(x_n, y) = 0 \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_n, y) = 0 \Rightarrow x_n \to y$

(ii) $\varrho(y_1, y_2) \leq \underbrace{\varrho(y_1, x_n)}_{\to 0} + \underbrace{\varrho(x_n, y_2)}_{\to 0} \Rightarrow \varrho(y_1, y_2) = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$

(iii) $\varrho(x_{n_k}, y)$ je vybraná z $\varrho(x_n, y)$ atd. (Viz zimní semestr.)

(iv) $\varrho(y,F) = \inf\limits_{x\in F} \varrho(y,x) \leq \varrho(y, x_n) \to 0 \Rightarrow \varrho(y,F) = 0 \overset{\text{V.3-}}{\Rightarrow} y \in \overline{F}$.
Ale F je uzávěr, tedy $\overline{F} = F \Rightarrow y \in F$.

Q.E.D.

VĚTA 5 (charakterizace uzavřených množin):

Množina F je uzavřená v (P,ϱ) právě tehdy, když platí implikace

$$x_n \in F \wedge x_n \to y \Longrightarrow y \in F$$

(Důsledek předchozích tvrzení.)

Příklady:

(i) konvergence v diskrétním prostoru:

$$x_n \to y \Longleftrightarrow \exists\, n_0\ \forall n \geq n_0 : x_n = y$$

(ii) $\mathbb{R}^n$: $\varrho_1 = \varrho_{\mathrm{NY}}$, $\varrho_2 = \varrho_{\mathrm{eukl.}}$, $\varrho_\infty = \varrho_{\max}$

$$\varrho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \overset{\text{Cauchy}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} = \sqrt{n} \cdot \varrho_{\mathrm{eukl.}}(x,y)$$

$$\leq n\varrho_{\max}(x,y) \leq n \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = n\varrho_1(x,y)$$

$$\Longrightarrow \varrho_1(x,y) \leq \sqrt{n}\varrho_{\mathrm{eukl.}}(x,y) \leq n\varrho_{\max}(x,y) \leq n\varrho_1(x,y)$$

Tedy konvergence ve všech třech metrikách splývá a konvergence v $\mathbb{R}^n$ je konvergence po složkách.

Definice:

Řekneme, že množina K v metrickém prostoru (P, ϱ) je **kompaktní**, jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\} \subset K$ lze vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}$, která je (i) konvergentní v P a (ii) její limita je prvkem K.

Příklady:

(i) Konečné množiny v libovolném (P, ϱ) jsou kompaktní.

(ii) V $(\mathbb{R}, |x - y|)$ např. $[a, b]$ je kompaktní.

(iii) V $(\mathbb{R}, \varrho_{\mathrm{diskr.}})$ jsou kompaktní pouze konečné množiny.

(iv) $B(0,1)$ (jednotková koule) v $(C[0,1], \sup)$ není kompaktní.
Tady je tato jednotková koule reprezentována všemi spojitými funkcemi, které na intervalu $[0,1]$ nevyběhnou z pásku $(-1,1)$.

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n x & x \in [0, 2^{-n}] \\ 1 & x \in [2^{-n}, 1] \end{cases}$$

Platí, že $\varrho(f_n, f_m) \geq 1/2$ $\langle$cvičení$\rangle$, pokud $n \neq m$. Z posloupnosti $\{f_n\}$ ale nelze vybrat konvergentní. Kdyby $f_{n_k} \to h$, pak $\varrho(f_{n_k}, h) \to 0$, a tedy

$$1/2 \leq \varrho(f_{n_k}, f_{n_j}) \leq \varrho(f_{n_k}, h) + \varrho(f_{n_j}, h) \to 0$$

a to je spor.

VĚTA 6 (vlastnosti kompaktních množin):

Mějme metrický prostor (P, ϱ) a v něm kompaktní množinu. Potom platí:

(i) K je uzavřená

(ii) K je omezená

(iii) Jestliže $F \subseteq K$ a F je uzavřená, pak F je kompaktní.

DŮKAZ:

(i) Nechť $\{x_n\} \subset K$, $x_n \to x \in P$. Chci dokázat, že $x \in K$.
Vybereme $x_{n_k} \to y$ v K, pak ale (jednoznačností limity) $x = y$. Ale $y \in K$, tedy $x \in K$ a K je uzavřená.

(ii) Nechť K není omezená, zvolme $x_0 \in P$. Pak platí

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n \in K : x_n \notin B(x_0, n)$$

(tedy $\varrho(x_n, x_0) > n$).
Z kompaktnosti platí, že $\exists\, x_{n_k}$ vybraná, $x_{n_k} \to y$ a $y \in K$. Potom

$$n < \varrho(x_n, x_0) < \underbrace{\varrho(x_n, y)}_{\to 0} + \varrho(y, x_0) < \varrho(y, x_0) + \varepsilon \qquad \forall n$$

$\nexists$ *Spor*

(iii) Nechť $\{x_n\} \subset F$. Pak samozřejmě také $\{x_n\} \subset K$.
K je kompaktní, tedy $\exists\, x_{n_k} \to y$ a $y \in K$. F je však uzavřená, tedy $y \in F$ a tudíž je F kompaktní.

Q.E.D.

VĚTA 7 (charakteristika kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^n$):

V prostoru $(\mathbb{R}^n, \varrho_{\text{eukl.}})$ je množina K kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.

DŮKAZ:

Myšlenka: v $\mathbb{R}$ Bolzano-Weistrass a z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^n$ indukcí.

Pozn.: Tvrzení V.7- neplatí pro obecné metrické prostory (viz $\overline{B}(0,1)$ v $C[a,b]$, ta je omezená, uzavřená, leč nikoliv kompaktní).