Martin Klazar

Matematická analýza III

Přepsal Petr Baudiš

v ak. roce 2005/2006

“”

Verze 0.20051004/L:1.616. Tato verze není garantována, nemusí být kompletní a může obsahovat chyby.
Aktuální verzi vždy najdete na `http://math.or.cz/`.
Sazba v programu TEX.

Metrické a topologické prostory

Metrické prostory

| Zde se přednášky zpočátku překrývají s koncem přednášek Analýzy II.

Definice:

Metrický prostor a topologický prostor definujeme jako (M,d), kde $d\colon M^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, přičemž:

(i) $d(x,y) = d(y,x)$
(ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Poznámka:

Bijekci $f\colon M_1 \to M_2$ nazýváme **izometrií**, pokud:

$$d_1(x,y) = d_2(f(x), f(y)) \qquad \forall x, y \in M_1$$

Příklady:

(i) $M = \mathbb{R}^n$, $p \geq 1$ reálné,

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^{\ p} \right)^{1/p}$$

(1) $n = 1$: $|x - y|$
(2) $n \geq 2$, $p = 2$: **euklidovská metrika**

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

(3) $p = 1$: **poštovní metrika**
(4) $p \to +\infty$: $d_\infty(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ (⟨cvičení⟩), neboli **maximová metrika**

(ii) $M = \{ f : f\colon X \to \mathbb{R},\ f \text{ je omezená } \}$,

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

neboli **supremová metrika**. Pokud navíc

$$M = C(a,b) = \{ f : f\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ je spojitá } \}$$

jde o maximovou metriku.

(iii) $M = C(a,b)$, $p \geq 1$ reálné,

$$d_p(f, g_= \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

pak pro $p = 1$ jde o **integrální metriku** a pro $p = 2$ jde o metriku, ve které se objevuje skalární součin. Pro $p \to +\infty$ konverguje (⟨cvičení⟩) k:

$$d_\infty(f,g) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Pozn.: Pro $M = R(a,b)$ neplatí.

(iv) Mějme souvislý graf $G = (M, E)$ a metriku $d(u, v)$ jako počet hran na P, P je (nějaká) nejkratší cesta spojující u a v.

(v) $M = \mathbb{Z}$, p nechť je prvočíslo (např. $p = 29$). Mějme $z \in \mathbb{Z}$, pak $m_p(z) = \max e \in \mathbb{N}_0 : p^e | z$, $m_p(0) = +\infty$. Zavedeme metriku

$$d_p(x, y) = 2^{-m_p(x-y)}$$

neboli tzv. **p-adickou metriku**.
Cvičení: $d_p(x, y)$ je **ultrametrika**: $d_p(x, y) \leq \max(d_p(x, z), d_p(z, y))$
Cvičení: V ultrametrice jsou všechny trojúhelníky rovnoramenné.
Cvičení: Každý bod koule je jejím středem.

Pozn.: Ve všem další buď (M, d) metrický prostor.

Definice:

Mějme $a \in M$, $r > 0$:

(i) $B(a, r) := \{x \in M : d(a, x) < r\}$ je **(otevřená) koule**

(ii) $\overline{B}(a, r) := \{x \in M : d(a, x) \leq r\}$ je **uzavřená koule**

Množina $X \subset M$ je **otevřená**, pokud $\forall a \in X\ \exists\, r > 0 : B(a, x) \subset X$.
Množina je **uzavřená**, pokud $M \setminus X$ je otevřená množina.

Cvičení: Pokud $B(a, r)$ je otevřená a X je konečná, pak X je uzavřená.

VĚTA 1 ():

$\emptyset$ a M jsou otevřené i uzavřené.
Systém otevřených množin se zachovává libovolnými sjednoceními a konečnými průniky.
Systém uzavřených množin se zachovává při konečných sjednoceních a libovolných průnicích.

Definice:

Platí-li $a \in M$, $a \in U$ a U je otevřená, pak U je **okolí bodu** a.
Máme-li $a \in M$, $X \subset M$, pak a je:

(i) **vnitřní bod** X: existuje okolí U bodu a takové, že $U \subset X$

(ii) **vnější bod** X: existuje U takové, že $U \subset M \setminus X$

(iii) **hraniční bod** X: není vnitřním ani vnějším bodem X, tedy pro $\forall U$ protíná X a $M \setminus X$

(iv) **limitní bod** X: $\forall U : X \cap U$ je nekonečná

(v) **izolovaný bod** X: $\exists U : U \cap X = \{a\}$

Pro $X \subset M$ definujme uzávěr X jako

$$\overline{X} = X \cup \{\text{limitní body množiny } X\}$$

Příklad:

Mějme $(M,d) = \mathbb{R}^2$ s euklidovskou metrikou,

$$X = (B \setminus \{0\}) \cup \{p\}$$

$$B = B(0,1)$$

```
        ,-.  K (kružnice)
       /   \
   ---(--0--)----+---
       \   /    p (2,0)
        `-'
          |-|
           1
```

(i) Vnitřní body X: $B \setminus \{0\}$
(ii) Vnější body X: $\mathbb{R}^2 \setminus (\overline{B}(0,1) \cup \{p\})$
(iii) Hraniční body X: $K \cup \{0,p\}$
(iv) Limitní body X: $\overline{B}(0,1)$
(v) Izolované body X: $\{p\}$
(vi) $\overline{X} = \overline{B}(0,1) \cup \{p\}$

VĚTA 2 ():

$X \subset M$ je uzavřená, právě když $X = \overline{X}$.

DŮKAZ:

"$\Rightarrow$"

Nechť X je uzavřená. Tedy $M \setminus X$ je otevřená, a když $a \in M \setminus X$, pak $U = M \setminus X$ je okolí a neprotíná jiné X, takže a není limitním bodem X, ergo $X = \overline{X}$.

"$\Leftarrow$"

Nechť $X = \overline{X}$, $a \in M \setminus X$ není limitním bodem X, tedy existuje U okolí a takové, že $U \cap X$ je konečná. Tedy existuje okolí U_a bodu a takové, že $U_a \cap X = \emptyset$ (tj. $U_a \subset M \setminus X$). $M \setminus X = \bigcup_{a \in M \setminus X} U_a$ a tedy $M \setminus X$ je otevřená množina, tudíž nutně X je uzavřená.

Q.E.D.

Definice:

$(x_n)_{n \geq 1} \subset M$, $\lim n \to \infty x_n = a \in M$, $x_n \to a$:

(a) $\forall U \; \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U$
(b) $\forall \varepsilon \; \exists n_0,\ \forall n \geq n_0 : d(x_n, a) < \varepsilon$
(c) $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, a) = 0$

$(x_n) \subset M$ je **Cauchyovská**, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0,\ \forall m,n \geq n_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

VĚTA 3 ():

Mějme $a \in M$, $X \subset M$. Potom (dle V2):

$$a \in \overline{X} \Longleftrightarrow a \in x \vee \exists (x_n) \subset X : x_n \to a$$

Důkaz: ⟨cvičení⟩

Definice:

Mějme metrické prostory (M_1, d_1), (M_2, d_2). Řekneme, že M_1 je **podprostor** M_2, pokud $M_1 \subset M_2$ a $\forall x, y \in M_1 : d_1(x, y) = d_2(x, y)$.

Pozn.: $X \subset M$ je též metrický prostor (X, d), s indukovanou metrikou. Dostaneme podprostor (M, d).

Součin (M, d_1) a (M, d_2): $(M_1 \times M_2, d)$, kde

$$v_1 := d_1(x_1, y_1)$$

$$v_2 := d_2(x_2, y_2)$$

$d(x, y)$ pak můžeme definovat jako

(i) $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

(ii) $v_1 + v_2$

(iii) $\max(v_1, v_2)$

(jak se brzy dozvíme, v topologickém prostoru jsou všechny v jistém smyslu shodné).

Pozor! Máme-li $(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ jako $M_1 \subset M_2$ s euklidovskou metrikou $d(x, y) = |x - y|$ a posloupností $x_n = 1/n$, pak (x_n) konverguje v M_2 ale nekonverguje v M_1.

Stejně tak $(0, 1)$ je uzavřená množina v M_1, ale není uzavřená v M_2. Máme-li $\{0\} \subset \mathbb{R}$ jako $M_1 \subset M_2$, pak $\{0\}$ je otevřená v M_1, ale ne v M_2.

Topologické prostory

Definice:

Topologický prostor (nebo také **topologie**) je dvojice $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{T} \subset \exp(x)$, splňující tři axiomy:

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(b) $\mathcal{U} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$

(c) $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}, \mathcal{U}$ konečná $\Rightarrow \bigcap \mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ (tj. $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$)

$\mathcal{T}$ je systém otevřených množin, zatímco $\{X \setminus U : U \in \mathcal{T}\}$ jsou uzavřené množiny. Tedy máme-li $a \in X$ a okolí a: $U \in \mathcal{T}$, pak $a \in U$. **T-O-D-O:** ?

Příklady:

(i) $(X, \{\emptyset, X\})$ je topologický prostor.

(ii) Základní příklad: systém otevřených množin v metrickém prostoru (M, d) tvoří topologický prostor (splňují všechny axiomy).

Metrizovatelné topologické prostory

$(X, \mathcal{T})$ **je metrizovatelný:** $\mathcal{T}$ jsou otevřené množiny v nějakém metrickém prostoru (X, d). Nás budou zajímat jen takovéhle.

Je-li $(X, \mathcal{T})$ metrizovatelný, každá konečná podmnožina X je uzavřená. Např. příklad (i) pro $|X| > 1$ *není* metrizovatelná topologie.

Je-li $(X, \mathcal{T})$ metrizovatelný,

$$\forall a, b \in X,\ a \neq b\ \exists U, V \in \mathcal{T} : a \in U,\ b \in V,\ U \cap V = \emptyset$$

neboli jde o **hausdorffovskou** topologii.

Báze topologického prostoru

Mějme $(X, \mathcal{T})$. Pak jeho **báze** je $U \subset \mathcal{T}$ taková, že každá $A \in \mathcal{T}$ je sjednocení nějakých množin z U.

Příklad:

Mějme metrický prostor (M, d), pak

$$U = \{B(a, r) : a \in M, r > 0\}$$

je bází topologie metrického prostoru (M, d). Tak jsme ale deifnovali otevřené množiny v metrickém prostoru!

$(X, d_1), (X, d_2)$ nechť jsou metrické prostory. Řekneme o nich, že jsou **ekvivalentní**, dávají-li stejnou toplogii.

Příklad:

Mějme $\mathbb{R}^n$, pak maximová metrika d_∞ a metrika

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \qquad p \geq 1$$

jsou ekvivalentní na $\mathbb{R}^n$:

Mějme $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Pak bez újmy na obecnosti nechť platí

$$\max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i| = |x_1 - y_1|$$

$$|x_1 - y_1| \le d_p(x, y) \le n^{1/p} |x_1 - y_1|$$

$$d_\infty(x, y) \le d_p(x, y) \le n^{1/p} d_\infty(x, y)$$

Z toho nějak plyne, že všechny metriky d_p ($p \ge 1$) a d_∞ jsou ekvivalentní.
Obecně máme-li $0 < r \le s$,

$$r d_1(x, y) \le d_2(x, y) \le s d_1(x, y) \qquad \forall x, y \in X$$

platí, že d_1 a d_2 jsou ekvivalentní (do kouličky v jedné metrice můžu strčit menší kouličku v druhé metrice a naopak).
Součinové metriky jsou ekvivalentní — pro $a, b \ge 0$:

$$\max(a, b) \le \sqrt{a^2 + b^2} \le a + b \le 2 \max(a, b)$$

$(X_1, \mathcal{T}_1)$ je **podprostorem** $(X_2, \mathcal{T}_2)$, pokud $X_1 \subset X_2$ a $\mathcal{T}_1 = \{X_1 \cap A : A \in \mathcal{T}_2\}$.
Máme-li $(X, \mathcal{T})$, $Y \subset X$, pak na Y máme **indukovanou topologii** $(Y, \mathcal{T}')$, $\mathcal{T}' = \{Y \cap A : A \in \mathcal{T}\}$. Zároveň $(Y, \mathcal{T}')$ je podprostorem $(X, \mathcal{T})$.
Součin topologických prostorů $(X_1, \mathcal{T}_1)$ a $(X_2, \mathcal{T}_2)$ je $(X, \mathcal{T})$, kde $X = X_1 \times X_2$ a $\mathcal{T}$ je dán bází $\{U_1 \times U_2 : U_1 \in \mathcal{T}_1, U_2 \in \mathcal{T}_2\}$ (vezmu-li místo $\mathcal{T}_i$ bázi, dostanu stejnou $\mathcal{T}$).

Příklad:

Mějme euklidovský metrický prostor $(\mathbb{R}^n, d_2)$, tedy

$$d_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Vezměme **euklidovskou topologii** na $\mathbb{R}^n$.
Platí, že euklidovský topologický prostor $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (součin dvou euklidovských topologií $\mathbb{R}'$). Podobně pro $\mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$.

Spojitá zobrazení

Mějme $f\colon X \to Y$ a (X, U), (Y, V) nechť jsou topologické prostory. Vezměme $a \in X$. Pak f je spojité v a, pokud pro každé okolí V bodu $f(a)$ existuje okolí U bodu a takové, že $f(U) \subset V$ (stačí testovat vzhledem k bázi). f je spojité, je-li spojité v každém $a \in X$.

$$C(X, Y) = \{f\colon X \to Y : f \text{ je spojité}\}$$

VĚTA 4 ():

Nechť $f\colon X \to Y$ a $(X, \mathcal{U})$ a $(Y, \mathcal{V})$ jsou topologické prostory. Pak f je spojité, právě když pro každé $V \in \mathcal{V}$ je $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$.

DŮKAZ:

"$\Rightarrow$"

Nechť $f \in C(X, Y)$. Pro $V = \emptyset$: $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{U}$, to je v pořádku.
Pro $V \ne \emptyset$ a $f(a) \in V$:

$$\exists U_a \in \mathcal{U} : a \in U_a,\ f(U_a) \subset V$$

Tedy $U_a \subset f^{-1}(V)$ a $f^{-1}(V) = \bigcup_{\substack{a \in X \\ f(a) \in V}} U_a$ a proto nutně $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$.

"$\Leftarrow$"

Mějme $a \in X$, $f(a) \in V \in \mathcal{V}$. Podle předpokladu o f vím, že $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$, $a \in U$. Máme $f(U) \subset V$ (dokonce $f(U) = V$).

Tedy je f spojité v a, a to v každém a — f je tudíž spojité.

Q.E.D.

VĚTA 5 ():

Mějme zobrazení $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f} Z$, $(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{V})$, $(Z,\mathcal{W})$ jsou TPy, $h = f \leq g$.

(i) f, g jsou spojitá zobrazení $\Rightarrow$ h je též spojité

(ii) f spojité v $a \in X$, g spojité v $f(a)$ $\Rightarrow$ h je spojité v a

DŮKAZ:

(i) $W \subset Z$, $W \in \mathcal{W}$. Pak

$$h^{-1}(W) = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(W)}_{\in \mathcal{V}\ \ (g\ spoj.)})}_{\in \mathcal{U}\ \ (f\ spoj.)}$$

Tedy h je spojité.

(ii) $a \in X$, $h(a) \in W \in \mathcal{W}$. g je spojité v $f(a)$, tedy $\exists V \in \mathcal{V}$ takové, že $f(a) \in V$, $g(V) \subset W$. f je spojité v a, tedy $\exists U \in \mathcal{U}$ takové, že $a \in U$, $f(U) \subset V$. Tedy $h(U) \subset W$, takže h je spojité v a.

Q.E.D.

Mějme topologické prostory $(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{V})$. Bijekce $f\colon X \to Y$ je **homeomorfismus** (isomorfismus topologických prostorů X a Y), pokud f i f^{-1} jsou spojitá zobrazení. X a Y jsou pak **homeomorfní**.

Příklad: $(0,1)$ a $\mathbb{R}$ (s euklidovskou topologií) jsou homeomorfní, např. prostřednictvím

$$f\colon (0,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{tg}(\pi(x - 1/2))$$

Kompaktní prostory

$(X,\mathcal{U})$ buď topologický prostor, $E \subset X$. **Otevřené pokrytí** E pak buď

$$\{A_i \in \mathcal{U} : i \in I\} : \bigcup_{i \in I} A_i \supset E$$

E je **kompaktní množina**, pokud pro každé otevřené pokrytí E existuje konečné podpokrytí

$$J \subset I : \bigcup_{i \in J} A_i \supset E$$

$(X,\mathcal{U})$ je **kompaktní prostor**, pokud X je kompaktní.

$(X,\mathcal{U})$ buď topologický prostor, $E \subset X$. Pak $(E,\mathcal{U}')$ buď topologický podprostor s indukovanou topologií. Platí, že $(E,\mathcal{U}')$ bude kompaktní jako topologické prostor, právě když E je kompaktní jako podmnožina $(X,\mathcal{U})$. Tedy kompaktnost je *absolutní vlastnost.*

Příklad:

Vezměme $\mathbb{R}$ s euklidovskou topologií. $(0,1) \subset \mathbb{R}$ není komapktní, $\mathbb{R}$ není kompaktní, $[0,\infty)$ není kompaktní, ale $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je kompaktní.

Příklad:

$X = [0, 2\pi)$. Vezměme $\mathbb{R}^2$ (např. jako $\mathbb{C}$).

$$f\colon X \to Y,\ f(\varphi) = e^{i\varphi}$$

f je spojitá bijekce, ale f^{-1} není spojité:

```
    ,---.X
   / ,-.  \
  / /  Y\ \
-(-(--0--)-'-.----)
  \ \   /   /
   \ `_'   /
    `_____'
```

VĚTA 6 ():

$(X, \mathcal{U})$ buď hausdorffovský topologický prostor, Je-li $K \subset X$ kompaktní, pak je K uzavřená.

DŮKAZ:

Vezměme bod $a \in X \setminus K$. Pak stačí najít okolí U_a bodu a takové, že $U_a \cap K = \emptyset$. Pak totiž

$$X \setminus K = \bigcup_{a \in X \setminus K} U_a$$

je otevřená, tedy K je uzavřená.

Zvolme $k \in K$, $a \in X \setminus K$. Tyto dva body mají dle hausdorffovosti disjunktní okolí:

$$k \in V(k) \in \mathcal{U},\ a \in U(k) = \mathcal{U},\ V(k) \cap U(a) = \emptyset$$

$\{V(k) : k \in K\}$ je přitom otevřené pokrytí K, tedy existuje konečně mnoho bodů $k_1, \ldots, k_n$ takových, že:

$$K \subset \underbrace{V(k_1) \cup \cdots \cup V(k_n)}_{V}$$

Uvažme okolí a jako

$$\underbrace{U(k_1) \cap \cdots U(k_n)}_{U_a}$$

$$U_a \subset U(k_i) \qquad i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$U_a \cap V(k_i) = \emptyset \qquad i \in \{1, \ldots, v\}$$

$$U_a \cap V = \emptyset$$

$$U_a \cap K = \emptyset$$

Q.E.D.

Topologie revisited

X, $\mathcal{B} \subset \exp(X)$, $G(\mathcal{B}) = \{\bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \subset \mathcal{B}\}$. Kdy je $G(\mathcal{B})$ topologie na X?
Nutné podmínky:

(i) $\bigcup \mathcal{B} = X$

(ii) $A_1, A_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in G(\mathcal{B})$

Cvičení: Tyto dvě podmínky jsou i postačující.

Součinová topologie

$(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{V})$ nechť jsou topologické prostory. Mějme součin $(X \times Y, \mathcal{W})$, pak $\mathcal{W}$ bude součinová topologie zadaná bází

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$$

$\mathcal{B}$ má vlastnosti báze:

(i) dokonce $X \times Y \in \mathcal{B}$

(ii) $U \times V, U' \times V' \in \mathcal{B}$

$$(U \times V) \cap (U' \times V') = \underbrace{(U \cap U')}_{\in \mathcal{U}} \times \underbrace{(V \cap V')}_{\in \mathcal{V}} \in \mathcal{B}$$

VĚTA 7 ():

Kompaktnost se zachovává při třech operacích:

(i) Přechod k uzavřenému podprostoru, tj.:

$$(X,\mathcal{U})\text{kompaktní}, Y \subset X \text{ uzavřená } \implies Y \text{ kompaktní}$$

(ii) Obraz spojitým zobrazením, tj.:

$$f \colon X \to Y \text{ spojitá } \implies f(x) \text{ je kompaktní podmnožina } Y$$

(iii) Kratézský součin, tj.:

$$(X,\mathcal{U}), (Y,\mathcal{V}) \text{ kompaktní prostory } \Rightarrow (X,\mathcal{U}) \times (Y,\mathcal{V}) \text{ je též kompaktní}$$

Důkaz: Viz webový text k přednášce. *Q.E.D.*

Definice:

Mějme $X \subset M$, $\varepsilon > 0$. X je ε-síť, pokud

$$\forall a \in M \; \exists b \in X : d(a,b) < \varepsilon$$

a pak také platí

$$M = \bigcup_{a \in X} B(a, \varepsilon)$$

VĚTA 8 ():

Metrický prostor (M,d) je kompaktní, právě když pro $\forall (x_n) \subset M$ má konvergentní podposloupnost (říkejme tomu vlastnost P).

LEMMA:

Má-li (M,d) vlastnost P, (M,d) má pro $\forall \varepsilon > 0$ konečnou ε-síť.

DŮKAZ:

Existuje $r > 0$ takové, že (M,d) nemá konečnou r-síť. Přitom $x_1 \in M$, tedy existuje $x_2 \in M$ takové, že $d(x_1, x_2) \geq r$ (protože $\{x_i\}$ není r-síť). Ergo existuje $x_3 \in M$ takové, že $d(x_i, x_3) \geq r$ pro $i = 1, 2$.

Tedy vyrobím $(x_n) \subset M$ takovou, že $1 \leq m < n$. To znamená, že $d(x_m, x_n) \geq r$ a tak (x_n) není konvergentní podposloupnost.

Tudíž (M,d) ale nemá vlastnost P.

Q.E.D.

DŮKAZ:

"$\Leftarrow$"

Mějme (M,d) s vlastností P. Pro spor nechť $\mathcal{O}$ je otevřené pokrytí M, které nemá konečné podpokrytí.

Vezměme $S_n := 1/n$-síť. Dle lemmatu je S_n konečná. Všimněme si, že $\exists\, x_n \in S_n$ takový, že $B(x_n, 1/n)$ nelze pokrýt konečně mnoha prvky $\mathcal{O}$.

Uvážím posloupnost $(x_n) \subset M$. Pro jednoduchost nechť $x_n \to \alpha \in M$ (z vlastnosti P, přinejhorším vyberu podposloupnost). $\alpha \in U \in \mathcal{O}$, tedy

$$\exists\, r > 0 : B(\alpha, r) \subset U$$

Vezmu m tak velké, že

$$d(x_m, \alpha) < r/2 \wedge 1/m < r/2$$

a z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$B(x_m, 1/n) \subset B(\alpha, r) \subset U$$

A máme spor, protože pomocí $B(x_m, 1/m)$ jsme pokryli U!

"$\Rightarrow$"

Nechť (M,d) je kompaktní. Vezměme libovolnou posloupnost $(x_n) \subset M$.

$$a \in M,\ a \in (x_n),\ \forall \varepsilon > 0 : \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, a) < \varepsilon\} \text{ nekonečná}$$

Má-li (x_n) limitní bod a, tedy (x_n) má podposloupnost konvergující z a.

Nechť (x_n) žádný limitní bod nemá. Není-li $a \in M$ limitním bodem,

$$\exists\, r(a) > 0 : I(a) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(a, r(a))\} \text{ konečná}$$

Z otevřeného pokrytí $\mathcal{O} = \{B(a, r(a) : a \in M\}$ vyberu konečné podpokrytí:

$$a_1, a_2, \ldots, a_t \in M : M = B(a_1, r(a_1)) \cup \cdots \cup B(a_t, r(a_t))$$

$$\underbrace{I(a_1) \cup \cdots \cup I(a_t)}_{I \text{ je konečná}} \subset \mathbb{N}$$

Vezmu si $m \in \mathbb{N} \setminus I$. Jak vypadá x_m?

$$x_m \notin \bigcup_{i=1}^{t} B(a_i, r(a_i)) = M$$

Zase jsme dostali spor, x_m musí přece někde ležet.

Q.E.D.

VĚTA 9 ():

$X \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená (tzn. $\exists\, B : X \subset B$ kde B je koule).

DŮKAZ:

"⇒"

Platí v každém (M,d): X je kompaktní, tedy X je uzavřená (V.6-).

Buď X neomezená. Platí, že pokud $x_n \in X \setminus B_n$, $(x_n) \subset X$ utíká do ∞. Mějme pevné $m \in \mathbb{N}$, pak

$$\lim_{n\to\infty} d(x_m, x_n) = +\infty$$

(x_n) tedy nemá kovnergentní podposloupnost, a to znamená, že X není kompaktní.

"⇐"

(Funguje v $\mathbb{R}^n$, ale nikoliv v obecném metrickém prostoru.)

Mějme uzavřenou a omezenou $X \subset \mathbb{R}^n$.

$$X \subset K = [0,a]^n = \underbrace{[0,a]x\cdots x[0,a]}_{n\times} \qquad a > 0$$

K je přitom kompaktní v $\mathbb{R}^n$ (z V.7-(iii); $[0,a] \subset \mathbb{R}^1$ je kompaktní). K je uzavřená (kvůli V.6-), X je také uzavřená — jako podmnožina K. Podle V.7-(i) je X kompaktní podmnožina K. Tedy X je kompaktní množina v $\mathbb{R}^n$.

Q.E.D.

VĚTA 10 ():

Mějme spojité zobrazení $f\colon X \to Y$ a topologické prostory $(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{V})$, kde $(X,\mathcal{U})$ je kompaktní.

(i) Buď $Y = \mathbb{R}$, pak f na X nabývá maxima i minima.

(ii) Buď f bijekce, Y hausdorffovské. Pak f^{-1} je také spojité.

(iii) X, Y nechť jsou metrické prostory, pak f je stejnoměrně spojité:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : a,b \in X,\ d_X(a,b) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a),f(b)) < \varepsilon$$

DŮKAZ:

(i) Mějme $f \in C(X,\mathbb{R})$, X je kompaktní. Pak $f(x) \subset \mathbb{R}$ je kompaktní (V.7-(ii)). Podle V.9- je $f(x)$ uzavřená a omezená, tedy $\sup f(x) \in f(x)$. Pak ale $f(x)$ má největší prvek. Obdoně má i prvek nejmenší.

(ii) Mějme bijektivní zobrazení $f\colon X \to Y$ z kompaktního do hausdorffovského topologického prostoru. Vezměme i inverzní zobrazení $g := f^{-1}$.
T-O-D-O: bzz? V.4- říká, že $g^{-1}(Z)$, $Z \subset X$ je uzavřená. Tedy (V.7-(i)) Z je kompaktní. $g^{-1}(Z) = f(Z) \subset Y$, přitom $f(Z)$ je kompaktní v Y (f je dle V.7-(ii) prosté). Tedy $f(Z)$ je uzavřená v Y (V.6-), a tedy spojitá.

(iii) $\langle$cvičení$\rangle$(podobně jako stejnoměrná spojitost $f \in C(0,1)$)

Q.E.D.

Souvislé prostory

Definice:

Mějme $(X,\mathcal{U})$. Řekneme, že $E \subset X$ je **obojetná**, je-li otevřená i uzavřená — např. $\emptyset$, X.
Řekneme, že $(X,\mathcal{U})$ je **nesouvislý**, má-li netriviální obojetnou podmnožinu E.
Mějme $Y \subset X$, pak Y je **nesouvislá**, je-li indukovaný podprostor $(Y,\mathcal{U}')$ nesouvislý.
Jinak řekneme, že $(X,\mathcal{U})$ je **souvislý**, resp. Y je souvislá.

VĚTA 11 ():

Mějme topologický prostor $(X,\mathcal{U})$:

(i) $E \subset X$ je **nesouvislá**, právě když

$$\exists A, B \in \mathcal{U} : E \subset A \cup B,\ \ A \cap B = \emptyset.\ A \cap E \neq \emptyset,\ \ B \cap E \neq \emptyset$$

(totéž platí s otevřenými i uzavřenými A, B).

(ii) $(X,\mathcal{U})$ je **souvislá**, právě když

$$\forall a, b \in X\ \exists \text{ souvislá } E \subset X : a, b \in E$$

(iii) $E, F \subset X$ nechť jsou souvislé, $E \cap F \neq \emptyset$. Pak platí, že $E \cup F$ je též souvislá.

DŮKAZ:

(i) ⟨cvičení⟩

(ii) Rozdělme na dvě implikace:

"$\Leftarrow$"

Zřejmé, uvažme $E := X$.

"$\Rightarrow$"

$(X,\mathcal{U})$ má popsanou vlastnost, ale je nesouvislý, tj. existuje $F \subset X$ obojetná taková, že $F \neq \emptyset$ a $X \setminus F \neq \emptyset$. Vezmu si $a \in F$, $b \in X \setminus F$ a souvislou $E \subset X$ takovou, že $a, b \in E$.

Přitom platí, že $E \subset F \cup (X \setminus F)$, to ale podle (i) ukazuje nesouvislost E (konec konců jde o sjednocení dvou disjunktních otevřených množin).

$\nparallel$ *Spor*

(iii) Pro spor nechť $E \cup F$ je nesouvislá, tj. podle (i):

(1) $E \cup F \subset A \cup B$

(2) A, B otevřené

(3) $A \cap B = \emptyset$

(4) A i B protíná $E \cup F$

Přitom je-li E souvislé, pak $E \subset A$ nebo $E \subset B$ (jinak by podle (i) E byla nesouvislá) a stejně i $F \subset A$ nebo $F \subset B$.

$$E, F \subset A \rightsquigarrow \text{ spor } (B \cap (E \cup F) = \emptyset)$$

$$E, F \subset B \rightsquigarrow \text{ spor } (A \cap (E \cup F) = \emptyset)$$

$$E \subset A, F \subset B \rightsquigarrow \text{ spor } (A \cap B \neq \emptyset)$$

Tedy máme spor a $E \cup F$ musí být souvislá.

Q.E.D.

Příklad:

$$E = [-5, -1) \cup [2, 7] \subset \mathbb{R}$$

Pak E je nesouvislá, např. $A = (-\infty, 0)$, $B = (0, +\infty)$.

VĚTA 12 ():

$E \subset \mathbb{R}$ je souvislá, právě když:

$$\forall x < y < z,\ x, z \in E \Rightarrow y \in E$$

(tj. E je interval).

DŮKAZ:

"$\Rightarrow$"

Nechť E není interval, tedy druhé tvrzení neplatí.

$$A := (-\infty, y), B := (y, +\infty) \rightsquigarrow E \subset A \cup B$$

a tedy E není souvislá (podle V.11-(i)).

"$\Leftarrow$"

Nechť E je nesouvislá, tedy

$$E \subset A \cup B : A \cap B = \emptyset,\ A \cap E \neq \emptyset,\ B \cap E \neq \emptyset$$

a uvažme uzavřené A, B. Vezměme $a \in A \cap E$ a $b \in B \cap E$, $a < b$.

$[a, b] \not\subset E$, tedy $\exists\, c \notin E : a < c < b$, tj. E není interval. Tedy předpokládejme nechť $[a, b] \subset E$ a odvoďme spor.

$$d = \inf\{x \in [a, b] : x \in B\}$$

Tvrdím, že $d \in B$:

(i) $d = b$: jasné

(ii) $d < b$: $d \in B$ podle uzavřenosti B

(iii) $d > a$: $[a, d) \subset A \Rightarrow d \in A$ (A je uzavřená).
$\not\sharp$ *Spor*

Q.E.D.

VĚTA 13 ():

(i) Obraz souvislého prostoru je opět souvislý.

(ii) Součin souvislých prostorů je také souvislý.

DŮKAZ:

(i) Máme spojité zobrazení $f\colon X \to Y$, $(X, \mathcal{U})$, $(Y, \mathcal{V})$, a $(X, \mathcal{U})$ je souvislý.
Tedy $f(X) \subset Y$ je souvislá podmnožina v Y. Bez újmy na obecnosti nechť $f(X) = Y$. Kdyby Y byl nesouvislý, tak $Y = A \mathbin{\dot\cup} B$ (A, B neprázdné a otevřené). Tedy $X = f^{-1}(A) \mathbin{\dot\cup} f^{-1}(B)$ a X je nesouvislý.
$\not\sharp$ *Spor*

(ii) $(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{V})$ nechť jsou souvislé, pak $(X \times Y, \mathcal{W})$ by měl být též souvislý (kde $\mathcal{W}$ je součinová topologie).
Díky $V.11 - (ii)$ víme, že

$$a = (a_X, a_Y),\ b = (b_X, b_Y),\ a, b \in X \times Y$$

$$\left.\begin{aligned} Y' &= \{a_X\} \times Y \\ X' &= X \times \{b_y\} \end{aligned}\right\} \text{ jsou souvislé podmnožiny v } X \times Y$$

(protože $X' \cong X$ a $Y' \cong Y$ — jsou homeomorfní).
Vezměme bod $\{(a_X, b_Y)\} = X' \cap Y'$, pak nutně $X' \cap Y' \neq \emptyset$ a podle V.11-(iii) $X' \cup Y'$ je souvislá podmnožina.

VĚTA 14 ():

$(X,\mathcal{U})$ buď souvislý, $f \in \mathbb{C}(X, \mathbb{R})$. Pak $f(x)$ je interval v $\mathbb{R}$. Tj. spojitá funkce na souvislém prostoru nabývá všech mezihodnot (vzpomínáte na Darbouxe?).
Důkaz: Přímý důsledek předchozí věty. *Q.E.D.*

Definice:

$(X,\mathcal{U})$ buď topologický prostor. $E \subset X$ je **obloukově souvislá**, pokud $\forall a, b \in E$ existuje spojité zobrazení $f\colon [0,1] \to E$ takové, že $f(0) = a$, $f(1) = b$.
Všimněme si, že je-li E obloukově souvislá, je také souvislá.

Příklad:

Jsme v $\mathbb{R}^2 \supset E$.

$$E = \underbrace{\{(x, \sin(1/x) : x \in (0,1]\}}_{E_1} \cup \underbrace{(\{0\} \times [-1,1])}_{E_2}$$

(graf je $\sin(1/x)$ plus svislá úsečka v nule z -1 do 1).

$$E := E_1 \cup E_2 \qquad E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

je souvislá, ale není obloukově souvislá ($a \in E_1$ se nedá spojit křivkou s $b \in E_2$ — rozmyslete si proč).

VĚTA 15 ():

$E \subset \mathbb{R}^n$ buď otevřená a souvislá, pak E je obloukově souvislá.

DŮKAZ:

Vezměme binární relaci na E: $a \sim b \Leftrightarrow a, b$ se dají spojit křivkou ležící v E.
$\sim$ buď relace ekvivalence:

(i) reflexivita ($a \sim a$): $f(x) = a \quad x \in [0,1]$

(ii) symetrie ($a \sim b \Rightarrow b \sim a$): $g(x) = f(1-x)$

(iii) transitivita ($a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$):

$$h(x) = \begin{cases} f(2x) & x \in [0, 1/2] \\ g(2x-1) & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Pro takovou bude stále platit $h : [0,1] \to E$.

Mám množinu bloků (tříd ekvivalence) $E/\sim$. Vezmu blok $C \in E/\sim$, tj. množinu vzájemně ekvivalentních (v $\sim$) prvků z E. Říkám, že C je otevřená: vezměme $c \in C$, E je otevřená, tedy vždy $B(c,r) \subset E$ pro nějaké $r > 0$. Máme-li úsečku $u = \overline{bc} \subset B(c,r) \subset E$, nutně také $b \in B(c,r)$, $b \sim c$, tedy $B(c,r) \subset C$.

Každý blok je tedy otevřený. Pokud bychom však měli takové bloky ≥ 2, pak

$$E = C \,\dot{\cup} \left(\dot{\bigcup_{\substack{B \text{ blok} \\ B \neq C}}} B \right)$$

tedy by byla E nesouvislá.

Nutně tedy existuje pouze jeden blok, tedy

$$\forall a, b \in E : a \sim b$$

Q.E.D.

Poznámka:

Tato věta platí, i když povolíme jako křivky jen lomené čáry.

Co že je ta oblouková souvislost? V takovém případě můžeme mít nějaké obloukově souvislé křivky A, B, kde jedna protíná horní a dolní stranu nějakého čtverce v $\mathbb{R}^2$, druhá protíná levou a pravou stranu, a platí, že se musejí někde protnout. Přitom pokud jsou křivky jen souvislé, již mohou být i v takovémto případě disjunktní.

Úplné metrické prostory

Definice:

(M, d) je úplný, pokud každá Cauchyovská posloupnost $(x_n) \subset M$ má limitu $a \in M$.

Příklady:

(i) $\mathbb{R}$ je úplný, stejně tak $\mathbb{R}^n$ nebo $[-5, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Zato $[0, 1)$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ úplné nejsou.

(ii) $C[a, b]$ s maximovou metrikou je úplný (viz MA2). Mějme integrální metriku na $C[a, b]$:

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Taková metrika už úplný metrický prostor nedává!

Např. mějme $a = -1$, $b = 1$, $(f_n) \subset C[-1, 1]$ cauchyovskou. f_n si vyrobíme mezi ± 1 a $\pm 1/n$ konstantní (± 1) a lineární mezi $\mp 1/n$. Vezměme $m \leq n$, pak

$$d(f_m, f_n) = \int_{-1}^{1} |f_m(x) - f_n(x)|\, dx \leq \int_{-1/m}^{1/m} 1\, dx = 2/m$$

(tedy je jistě cauchyovská).

Ptáme se, jestli $\exists\, f \in C[-1, 1] : f_n \to f$. To by ale znamenalo

$$f = \begin{cases} -1 & \text{na } [-1, 0) \\ 1 & \text{na } (0, 1] \end{cases}$$

a to je ve sporu s tím, že f je spojitá v 0.

(iii) Kompaktní metrický prostor je vždy úplný (viz V.8-).

(iv) $(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \ \ \textit{(bijekce)}$$

$$f^{-1}(x) = \operatorname{tg} x : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$$

Tedy f i f^{-1} jsou spojité a jde tudíž o homeomorfismus. Ale přesto $\mathbb{R}$ je úplný a $(-\pi/2, \pi/2)$ ne! f je totiž stejnoměrně spojitá, f^{-1} však ne (byly-li by obě stejnoměrně spojité, již by se úplnost zachovávala).

VĚTA 16 ():

Úplnost metrického prostoru se zachovává při třech operacích:

(i) Přechod k uzavřenému podprostoru (je-li (M, d) úplný a $E \subset M$, E je uzavřená, právě když (E, d) je úplný).

(ii) Obraz prostým zobrazením f, pokud f i f^{-1} jsou stejnoměrně spojitá zobrazení.

(iii) Kartézský součin (jsou-li $(M, d), (N, e)$ úplné, $(M \times N, \sqrt{d^2 + e^2})$ je též úplný).

Důkaz: $\langle$cvičení$\rangle$ *Q.E.D.*

Definice:

Zobrazení $f\colon (M,d) \to (N,e)$ je **kontrahující**, pokud

$$\exists\, 0 < g < 1,\ \forall x, y \in M : e(f(x), f(y)) \le g d(x,y)$$

(všimněme si, že f je pak i stejnoměrně spojité).

Máme-li $f\colon X \to X$, $a \in X$ je **pevný bod** f, pokud $f(a) = a$.

Máme-li $x_1 \in X$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, …: $(x_n) \subset X$, $x_{n+1} = f(x_n)$ nazveme **posloupností iterací** zobrazení f.

VĚTA 17 (Picardova–Banachova o pevném bodu):

Každé kontrahující zobrazení f úplného metrického prostoru do sebe má právě jeden pevný bod a každá posloupnost (x_n) iterací f k němu konverguje.

DŮKAZ:

Mějme $(x_n) \subset M$. Ta je cauchyovská, neboť

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \le q d(x_{n+1}, x_n) \le q^2 d(x_n, x_{n-1}) \le \cdots \le q^n d(x_2, x_1)$$

a vezmeme-li $k, n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+k}, x_n) \overset{\Delta}{\le} \sum_{i=1}^{k} d(x_{n+i}, x_{n+i-1}) \le \sum_{i=1}^{k} q^{n+i-2} d(x_2, x_1) \le d(x_2, x_1) \sum_{i=1}^{\infty} q^{n+i-2} = d(x_2, x_1) \frac{q^{n-1}}{1-q}$$

a (x_n) je cauchyovská, tzn. $\exists\, a \in M : x_n \to a$.

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Ale pak ze spojitosti f platí

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a)$$

a a je tedy pevný bod.

Je opravdu pouze jeden? Mějme $a, b \in M$ pevné body f:

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \le q d(a,b) \Rightarrow d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$$

Q.E.D.

Příklad:

Mějme $y(x)\colon I \to \mathbb{R}$ kde $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $1 \in I$. Dále uvažme

$$y(1) = 3 \qquad y'(x) = y(x) \tag{$*$}$$

čemuž díky oné počáteční podmínce ($y(1) = 3$) vyhovuje jen a pouze

$$y(x) = 3/e \cdot e^x$$

Obecně mějme funkci typu $(*)$:

$$(*) \begin{cases} y(a) = b \\ y'(x) = f(x, y(x)) \end{cases}$$

$$f(u,v)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

VĚTA 18 (Picard):

Nechť $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ a navíc nechť f je **lipschitzovská**:

$$\exists\, M > 0,\ \forall u, v, w \in \mathbb{R} : |f(u,v) - f(u,w)| \leq M|v - w|$$

Pak $\forall a \in \mathbb{R}$ má okolí $I = (a - \delta, a + \delta)$, na němž má $(*)$ jednoznačné řešení.

DŮKAZ:

$(*)$ je ekvivalentní rovnici

$$y = y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt$$

$$x \in I = (a - \delta, a + \delta)$$

$$J = [a - \delta, a + \delta]$$

Položme

$$A(y) = z(x) := b + \int_a^x f(t, y(t)\, dt$$

$$y = A(y)$$

Všimněme si, že $z'(x) = f(x, y(x))$ ($z(x)$ má na J spojitou derivaci). Tedy

$$A\colon C^1(J, \mathbb{R}') \to C^1(J, \mathbb{R})$$

(kde $C^1(J, \mathbb{R}) = \{g\colon J \to \mathbb{R}\colon\ g$ má na J spojitou derivaci$\}$).

$C^1(J, \mathbb{R})$ s maximovou metrikou je úplný prostor. Navíc pro dostatečně malé $\delta > 0$ je A kontrahující:

$$y(x), z(x) \in C^1(J, \mathbb{R}) : d(A(y), A(z)) = \max_{x \in J} \left| \int_a^x f(t, y(t))\, dt - \int_a^x f(t, z(t))\, dt \right| =$$

$$= \max_y \left| \int_a^x (f(t, y(t)) - f(t, z(t))\, dt \right| \leq \left| \max_{x \in J} \int_a^x \underbrace{|f(t, y(t)) - f(t, z(t))|}_{\leq M|y(t) - z(t)|}\, dt \right|$$

a to podle Lipschitzovy podmínky odhadnu jako

$$\leq \left| \max_{x \in J} \int_a^x M \underbrace{|y(t) - z(t)|}_{\leq d(y,z)}\, dt \right| \leq \left| \max_{x \in J} \underbrace{\int_a^x M d(y,z)\, dt}_{(x-a)Md(y,z)} \right| = \delta M d(y,z)$$

Vezměme $\delta \leq 1/2n$, tzn. $d(A(y), A(z)) \leq 1/2 d(y,z)$ a tedy podle V.17- A má jednoznačný pevný bod y, $A(y) = y$.

Q.E.D.

Pozn.: Lze to i jednodušeji, neboť stačí, že $f \in C[a - \delta, a + \delta]$.

Funkce více proměnných

Normovaný vektorový prostor

Normovaný vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$) X: $||\cdot||: X \to \mathbb{R}$ splňující (pro $y, x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$)

(i) $||x|| \geq 0$, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(ii) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

$d(x, y) := ||x - y||$ je metrika.

Příklad:

$\mathbb{R}^n$ s metrikou d_p je normovaný vektorový prostor,

$$||x||_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$$
$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i$$

Podobně pro $C[a, b]$.

Banachův prostor: Normovaný vektorový prostor, pro nějž je metrika $d(x, y) = ||x - y||$ úplná.

Vektorový prostor se skalárním součinem

Mějme X vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ se zobrazením $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$:

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(ii) $\langle \kappa x + \lambda x', y \rangle = \kappa \langle x, y \rangle + \lambda \langle x', y \rangle$ $\quad \forall x, x', y \in X, \ \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$
(iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Příklad:

Mějme $\mathbb{R}^n$, pak
$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m$$
Mějme $C[a, b]$, pak
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$$

Každý vektorový prostor se skalárním součinem je normovaný vektorový prostor (tedy i metrický, tedy i topologický prostor), neboť:
$$||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$
Dle Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti (vezměme ji jako **V1**) platí trojúhelníková nerovnost:

$$X \text{ má skal. součin, } x, y \in X \Rightarrow \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

(rovnost nastává právě, když $x = cy$ kde $c \in \mathbb{R}$).

$$\Longrightarrow \langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} \Longleftrightarrow$$
$$\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \langle x, y \rangle \leq \left(\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \right)^2$$
$$\langle x + y, x + y \rangle \leq \left(\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \right)^2$$
$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$
$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

Hilbertův prostor: Úplný vektorový prostor se skal. součinem (tj. $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$).

Budeme uvažovat $\mathbb{R}^m$,

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_my_m$$

$$||x||_2 = ||x|| = |x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}$$

a dále otevřenou $D \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $a \in D$.

(i) Derivace funkce f v bodě a ve směru v ($v \in \mathbb{R}^m$, $v \neq 0$) je limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+vt) - f(a)}{t} =: D_vf(a)$$

Např. vezmeme částici a pošleme ji ve směru v skrz D (tedy poletí po přímce $a + vt$, $t \in \mathbb{R}$), f bude měřit teplotu v D. Pak okamžitá změna teploty částice v bodě a je právě $D_vf(a)$.

$$f(a+vt) = f(a) + D_vf(a)\cdot t + o(t) \qquad t \to 0$$

(kde $o(t)$ je nějaká mrňavá chyba, která ještě navíc jde sama taky k nule).

(ii) Parciální derivace funkce f v bodě a podle proměnné x_i ($1 \le i \le m$) je limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_m) - f(a_1, a_2, \ldots, a_m)}{h} =: \frac{\delta f}{\delta x_i}(a)$$

$$\frac{\delta f}{\delta x_i}(a) = Df_{e_i}(a)$$

Gradientem funkce f v bodě a nazveme

$$\triangledown f(a) = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}(a), \frac{\delta f}{\delta x_2}(a), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_m}(a)\right)$$

Příklad:

$$\frac{\delta(yx^2e^y - z^3 \operatorname{arctg} x)}{\delta y} = x^2(e^y + ye^y)$$

(iii) Funkce f má v bodě a **(totální) diferenciál** (neboli je f v a **diferencovatelná**), existuje-li linearní zobrazení $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{v\to\overline{0}} \frac{f(a+v) - f(a) - L(v)}{||v||} = 0$$

$$\iff f(a+v) = f(a) + L(v) + o(||v||) \qquad v \to \overline{0}$$

($v \to \overline{0}$ přitom znamená, že jeho euklidovská vzdálenost od nulového vektoru jde k nule).
Mohu vzít L podle a, tedy $L = L_a$, nebo také $L := Df(a)$, $L(v) = Df(a)(v)$.

Mějme $f\colon D \to \mathbb{R}^n$, tj. $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $f_i\colon D \to \mathbb{R}$. Pak f má v a (totální) diferenciál, existuje-li lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\lim_{v\to\overline{0}} \frac{||f(a+v) - f(a) - L(v)||}{||v||} = 0$$

$$\iff f(a+v) = f(a) + L(v) + \alpha(v) \qquad v \to \overline{0}$$

Přitom $\alpha\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, kde

$$||\alpha(v)|| = o(||v||) \qquad v \to \overline{0} = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{m}$$

VĚTA 2 (vlastnosti totálního diferenciálu):

Mějme $D \subset \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

(i) $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ je diferencovatelná v bodě $a \in D$, právě když každá $f_i\colon D \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě a.

(ii) Je-li $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ diferencovatelná v bodě $a \in D$, je v a také spojitá.

(iii) Je-li $f\colon D \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $a \in D$, má v a všechny parciální derivace $\frac{\delta f}{\delta x_i}(a)$,

$$Df(a)(h) = \frac{\delta f}{\delta x_1}(a)h_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2}(a)h_2 + \cdots + \frac{\delta f}{\delta x_m}(a)h_m$$

(iv) Je-li $f\colon D \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $a \in D$ a máme-li $0 \neq v \in \mathbb{R}^m$, pak

$$D_v f(a) = Df(a)(v)$$

DŮKAZ:

(i) Cvičení na definice.

(ii) Zřejmé.

(iii) Vezměme $L = Df(a)$, to znamená:

$$L(h) = L(\sum_{i=1}^{m} h_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} h_i L(e_i) = \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_m h_m$$

$$f(a + te_i) - f(a) = L(te_i) + o(||te_i||) = tL(e_i) + o(|t|) = t\alpha_i + o(|t|) \rightsquigarrow \alpha_i - \frac{\delta f}{\delta x_i}(a)$$

(iv) Podobně, $\langle$cvičení$\rangle$.

Q.E.D.

Důsledek: $Df(a)$ je jednoznačně určený.
V.2-(iii) můžeme dále zobecnit jako

$$\langle \triangledown f(a), h \rangle = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}(a), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_m}(a) \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

Definice:

Mějme $D \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$. Pak definujme **Jacobiho matici zobrazení** f v bodě a jako

$$Df(a) = \left(\frac{\delta f_i}{\delta x_j}(a) \right)_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots m}}$$

Jakobián: Determinant Jacobiho matice, postavíme-li $m = n$.

Důsledek:

$$Df(a)(h) = \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} & \dots & l_{1,m} \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \dots & l_{2,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} = (\dots) \in \mathbb{R}^n$$

$$l_{i,j} = \left(\frac{\delta f_i}{\delta x_j}(a)\right)$$

Pozn.: Všimněme si, že řádky tvoří gradienty f_i.

Příklady:

(i) Vezměme $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a definujme ji jako

$$f = \begin{cases} 1 & y = x^2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pak pro $a = \overline{0}$ platí

$$D_v f(\overline{0}) = 0 \qquad \forall v$$

ale f není spojitá v $\overline{0}$.

(ii) Na osách $f = 1$, jinak $f = 0$. Pak pro $a = 0$ platí

$$\frac{\delta f}{\delta x}(\overline{0}) = \frac{\delta f}{\delta y}(\overline{0}) = 0$$

ale f nemá žádnou jinou směrovou derivaci.

VĚTA 4 (o vztahu parciálních derivací a diferenciovatelnosti):

Mějme $f\colon V \to \mathbb{R}$ a $U \subset \mathbb{R}^m$ okolí a. f nechť má na U všechny parciální derivace a každá $\frac{\delta f}{\delta x_i}$ nechť je spojitá v a. Pak f je v bodě a diferencovatelná.

DŮKAZ:

Hlavní myšlenka (podrobně v učebním textu):
$m = 2$, vezměme $a = (0, 0)$. Spojme a s nějakým bodem h v U lomenou úsečkou $s_1, \dots, s_n$. Pak dle Lagrangovy věty o střední hodnotě přírůstek f na s_i bude $\frac{\delta f}{\delta x_i}(\zeta) \cdot h_i$.

$$f(h) - f(\overline{0}) = \sum_{i=1}^{m} \text{přírůstek } f \text{ na } s_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta f}{\delta x_i}(\zeta_i) h_i =$$

(kde bod ζ_i leží někde na úsečce s_i).

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta f}{\delta x_i}(\overline{0}) + o(||h||)$$

Q.E.D.

VĚTA 5 ():

Nechť f je spojitá na úsečce u a diferenciovatelná v každém vnitřním bodě u. Pak

$$\exists \zeta \in u : f(b) - f(a) = Df(\zeta)(b-a)$$

DŮKAZ:

Vezměme $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ a nadefinujme si ji jako $F(t) = f(a+th)$, $h = b-a$, $t \in [0,1]$. F je z předpokladu spojitá na $[0,1]$,

$$F' = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(a+th+\Delta h) - f(a+th)}{\Delta} =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{Df(a+th)(\Delta h) + o(\overbrace{||\Delta h||}^{|\Delta|\cdot||h||})}{\Delta} = Df(a+th)(h)$$

Lagrangova věta o střední hodnotě tvrdí, že

$$\exists t_0 \in (0,1) : F(1) - F(0) = F'(t_0) = Df(\underbrace{a+t_0h}_{\zeta})(h)$$

Q.E.D.

Důsledek:

$D \subset \mathbb{R}^m$ buď otevřená a souvislá, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $Df(a) = \tilde{0}$ (nulové lineární zobrazení) pro $\forall a \in D$. Pak f je na D konstantní.

DŮKAZ:

Vezměme nějaké dva body a a b a spojme je lomenou čarou (to umíme z V1.15-). Pak hodnoty v "bodech zlomu" (nazvěme je $c_1, \ldots, c_n$) budou dle V.5- všechny stejné:

$$f(a) = f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = \cdots = f(b)$$

$$f(c_2) - f(c_1) = \underbrace{Df(\zeta)}_{\tilde{0}}(c_2 - c_1) = 0 \Rightarrow f(c_2) = f(c_3)$$

Q.E.D.

Příklad:

Mějme $a \in U \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon V \to \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^m$, $||v|| = 1$

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

Pro jaký směr v je $|D_v f(a)|$ c_0 největší? Předpokládejme, že existuje $Df(a)$. Pak $D_v f(a) = Df(a)(v)$.

$$|D_v f(a)| = |Df(a)(v)| = |\,\langle \bigtriangledown f(a), v\rangle\,|$$

To ale umíme odhadnout Cauchy–Schwarzovou nerovností jako

$$\leq ||\bigtriangledown f(a)|| \cdot ||v|| = ||\bigtriangledown f(a)||$$

a navíc víme, že rovnost nastává, právě když v je nějaký násobek gradientu. Protože v je jednotkový vektor, takové jsou právě dva:

$$v^+ = \frac{1}{||\bigtriangledown f(a)||} \bigtriangledown f(a)$$

$$v^- = -\frac{1}{||\bigtriangledown f(a)||} \bigtriangledown f(a)$$

v^+ a v^- jsou ony směry největšího růstu, resp. poklesu funkce f v bodě a. Ten je tedy určen gradientem.

Tečná (nad)rovina

Mějme $D \subset \mathbb{R}^2$ otevřenou, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$. Pak **plocha** bude $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$. Nechť f má v bodě (x_0, y_0) diferenciál:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$$

Zapomeňme na chybu a vezměme pouze afinní funkci:

$$z(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{z_0} + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Graf T této funkce pak nazveme **tečnou rovinou** T k ploše P v bodě $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$.

Všimněme si, že T je jediná rovina $L = L(x, y) = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0)$, která splňuje

$$f(x,y) = L(x,y) + o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

$$\bigtriangledown f((x_0,y_0)) = \left(\frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0), \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)\right)$$

$$V \in \mathbb{R}^3 = \left(\frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0), \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0), -1\right)$$

$$\langle V, (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\rangle = 0 \qquad \forall (x,y,z) \in T$$

Tedy V je kolmý na T, neboli V je normálový vektor roviny T.

VĚTA 7 ():

Mějme otevřenou $U \subset \mathbb{R}^m$, funkce $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ a nějaký bod $a \in U$. Nechť f, g jsou definované v a:

(i) Pak i $\kappa f + \lambda y$ je diferencovatelná v a a má v a diferenciál:

$$\kappa Df(a) + \lambda Dg(b)$$

(ii) I fg je diferencovatelná v a a má v a diferenciál:

$$g(a) \cdot Df(a) + f(a) \cdot Dg(a)$$

(iii) Pokud $g(a) \neq 0$, pak i f/g je diferencovatelná v a a má v a diferenciál:

$$1/g(a)^2(f(a) \cdot Df(a) - f(a) \cdot Dg(a))$$

Důkaz: Nebudeme dělat, vyjde se z definice diferenciálu. *Q.E.D.*
Pozn.: (i) platí i v situaci $f, g\colon U \to \mathbb{R}^k$

Podobně i pro parciální derivace:

(i) $\dfrac{\delta(\kappa Df(a) + \lambda Dg(b))}{\delta x_i}(a) = \kappa\dfrac{\delta f}{\delta x_i}(a) + \lambda\dfrac{\delta g}{\delta x_i}g(a)$

(ii) $\dfrac{\delta fg}{\delta x_i}(a) = \dfrac{\delta f}{\delta x_i}(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot\dfrac{\delta g}{\delta x_i}(a)$

(iii) $\dfrac{\delta f/g}{\delta x_i}(a) = \dfrac{\frac{\delta f}{\delta x_i}(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot\frac{\delta g}{\delta x_i}(a)}{g(a)^2}$

VĚTA 8 (o diferenciálu složeného zobrazení):

Mějme otevřené $U \subset \mathbb{R}^m$ a $V \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon U \to V$, $g\colon V \to \mathbb{R}^k$. Vezměme $a \in U$, $b = f(a) \in V$.
Předpokládáme, že f je diferencovatelné v a a g je diferencovatelné v b. Pak $h = g \circ f\colon U \to \mathbb{R}^k$ je diferenciál v bodě a a pro diferenciál h v a máme:

$$Dh(a) = Dg(b) \circ Df(a)$$

LEMMA 9:

V řeči Jacobiho matic:

$$\left(\frac{\delta h_i}{\delta x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{k,m} = \left(\frac{\delta g_i}{\delta x_j}(b)\right)_{i,j=1}^{k,n}\left(\frac{\delta f_i}{\delta x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{n,m} =$$

$$\left(\sum_{v=1}^{n}\frac{\delta g_i}{\delta x_v}(b)\cdot\frac{\delta f_v}{\delta x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{k,m}$$

V případě $k = 1$ je to pak zvláště zajímavé, protože $f_i\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $g\colon V \to \mathbb{R}$, $h\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

$$h = g(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

$$\frac{\delta h}{\delta x_i}(a) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\delta g}{\delta x_j}(f(a))\cdot\frac{\delta f_j}{\delta x_i}(a)$$

Pro počítání se složenými funkcemi se v praxi hodí tzv. **řetízkové pravidlo**:

$$= \langle\bigtriangledown g(f(a)), f'(a)\rangle$$

$$f = (f_1, \ldots, f_n), \quad f' = (f_1', \ldots, f_n')$$

Příklad:

Jak souvisí řetízkové pravidlo a zákon zachování energie?
Vezměme otevřenou $U \subset \mathbb{R}^m$ a na ní zobrazení $F\colon U \to \mathbb{R}^m$. Toto zobrazení si představme jako *silové pole*, které nám říká, jak velká síla (a jakým směrem) působí ve všech bodech U.
Pošleme množinou U nějakou částici po dráze $\gamma\colon [0,1] \to U$ ($\gamma = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t))$). Předpokládejme, že dráha bude plně určena silovým polem F.
Vyjděme z *Newtonova zákona síly* (síla = hmotnost × zrychlení):

$$F(\gamma(t)) = m\gamma''(t)$$

$$\gamma'' = (\gamma_1''(t), \ldots, \gamma_m''(t))$$

(všimněme si, že γ'' představuje vektor zrychlení).

Druhý fyzikální předpoklad bude, že existuje funkce $f\colon U \to \mathbb{R}$ taková, že

$$a \in U\colon F(a) = - \bigtriangledown f(a)$$

(tzv. konzervativní pole). Potenciál $f(a)$ definujme jako potenciální energii částice, je-li v bodě a. Kinetická energie částice v čase $t \in [0,1]$ bude:

$$m/2 \cdot v(t)^2 = m/2 \cdot \gamma'(t)^2 = m/2 \cdot \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = m/2 \cdot ||\gamma'(t)||^2$$

Zákon zachování energie nám říká, že součet potenciální a kinetické energie je konstantní:

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) + m/2 \cdot \gamma'(t)^2 &=: s(t) \qquad t \in [0,1] \\ s'(t) &= \langle \bigtriangledown f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle + m \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \\ &= \langle \bigtriangledown f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle + \langle \gamma'(t), m\gamma''(t) \rangle \\ &= \langle \bigtriangledown f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle + \langle \gamma'(t), F(\gamma(t)) \rangle \\ &= \langle \bigtriangledown f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle + \langle \gamma'(t), - \bigtriangledown f(\gamma(t)) \rangle \\ &= \langle \bigtriangledown f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle - \langle \bigtriangledown f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Tedy $s(t)$ je konstantní.
Q.E.D.

Parciální derivace vyšších řádů

Vezměme $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. f má $\delta_i f(a)$ pro $\forall a \in U$, tedy $\delta_i f\colon U \to \mathbb{R}$. Parciální derivaci druhého řádu v a podle x_i a x_j pak bude

$$\delta_j(\delta_i f)(a) =: \frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}(a)$$

Obdobně se pak zavádějí i parciální derivace vyšších řádů.
Pozor, obecně může záležet na pořadí derivování, např.:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(0,0) = 1$$
$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(0,0) = -1$$

VĚTA 10 (o pořadí parciálních derivací):

Mějme $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a bod $a \in U$. Nechť f má nad U parciální derivace $\delta_j \delta_i f$, $\delta_i \delta_j f$ (v zápisu $\delta_j \delta_i f$ derivujeme nejdřív podle i, pak podle j) a obě nechť jsou spojité v a. Potom

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}(a) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(a)$$

DŮKAZ:

Předpokládejme $m = 2$, tedy $f(x,y)$. Položme $a = (0,0)$. Stačí ukázat, že pro $\forall h > 0$ ve čtverci $[0,h] \times [0,h]$ existují body σ a τ takové, že

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\sigma) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\tau)$$

(ze spojitosti v počátku pak plyne zbytek).

Označme si rohy čtverce jako

$$a = (0,0) \quad b = (0,h) \quad c = (h,0) \quad d = (h,h)$$

a dále si označme délku úsečky z nějakého α do β jako:

$$f(u) = f(\alpha\beta) := f(\beta) - f(\alpha)$$

$$č = f(d) - f(b) - f(c) + f(a) = \begin{cases} f(cd) - f(ab) = \varphi(h) - \varphi(0) & \varphi(t) := f(u_t) \\ f(bd) - f(ac) = \psi(h) - \psi(0) & \psi(t) := f(v_t) \end{cases}$$

Na to si můžeme přivolat pana Lagrange s větou o střední hodnotě:

$$\varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(t_0) \cdot h \qquad 0 < t_0 < h$$

Uvažme $\varphi'(t) = \delta_x f(u_t)$,

$$= \delta_x f(u_{t_0}) \cdot h = (\delta_x f(t_0, h) - \delta_x f(t_0, 0))h$$

a dle Lagrangeho střední hodnoty

$$= \delta_y \delta_x f(\underbrace{t_0, t_1}_{\tau})h^2 \qquad 0 \leq t_1 < h$$

Analogicky:

$$č = \delta_x \delta_y f(\underbrace{s_0, s_1}_{\sigma})h^2 \qquad 0 < s_0, s_1 < h$$

$$\delta_y \delta_x(\tau) = \delta_x \delta_y(\sigma)$$

Q.E.D.

Pozn.: Rovnost lze dokázat i se slabšími předpoklady.

K $U \subset \mathbb{R}^m$ definujme $C^k(U)$ jako množinu všech $f\colon U \to \mathbb{R}$, kde f má na U všechny parciální derivace řádů $\leq k$, a to spojité.

Důsledek:

Mějme $f \in C^k(U)$, bod $a \in U$ a dva vektory $(i_1, \ldots, i_n)$ a $(j_1, \ldots, j_n)$, které se liší jen permutací ($n \leq k$). Pak platí:

$$\frac{\delta^n f}{\delta x_{i_n} \cdots \delta x_{i_1}}(a) = \frac{\delta^n f}{\delta x_{j_n} \cdots \delta x_{j_1}}(a)$$

$$\frac{\delta^4 f}{\delta x \delta y \delta z \delta x}(a) = \frac{\delta^4 f}{\delta x^2 \delta y \delta z}(a) = \frac{\delta^4 f}{\delta z \delta x^2 \delta y}(a) = \cdots$$

VĚTA 12 (Taylorův rozvoj funkcí více proměnných):

Mějme $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C^n(U)$ a bod $a \in U$. Pak v okolí a máme rozvoj

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}(h_1\delta_1 + h_2\delta_2 + \cdots + h_m\delta_m)^i f(a) + o(||h||^h)$$

$$= \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m \geq 0 \\ i_1+\cdots+i_m \leq n}} \frac{1}{i_1! \cdots i_m!} \cdot \frac{\delta^{i_1+\cdots+i_m} f}{\delta x_{i_1} \cdots x_{i_m}}(a) \cdot h_1^{i_1} \cdots h_m^{i_m} + o(||h||^h)$$

(Tato rovnost plyne z multinomické věty.)

Mějme $i_1 + \cdots + i_m = 0$, jdeme $\to f(a)$. Uvažme $(h_1\delta_1 + \cdots + h_m\delta_m)^i f$, vezměme např. $i = 2$:

$$(h_1\delta x + h_2\delta y)^2 f = (h_1^2\delta x\delta x + h_2^2\delta y\delta y + 2h_1h_2\delta x\delta y)f = h_1^2\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + h_2^2\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} + 2h_1h_2\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}$$

Lokální extrémy

Mějme $f\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a bod $a \in U$. Nechť existují $\delta_1 f(a), \ldots, \delta_m f(a)$. Jaké jsou podmínky lokálního extrému funkce f v a?

Připomeňme si, že neostré lokální minimum v a definujeme jako

$$\exists\,\delta > 0 : ||x - a|| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(a)$$

zatímco ostré lokální minimum v a bude

$$\exists\,\delta > 0 : 0 < ||x - a|| < \delta \Rightarrow f(x) > f(a)$$

Všimněme si, že má-li f v a lokální extrém, $\bigtriangledown f(a) = 0$ (neboť pro $\forall x_i,\ 1 \leq i \leq m : \frac{\delta f}{\delta x_i}(a) = 0$).

Definujme **stacionární body** (nebo také **kritické body**) jako $\{a \in U : \bigtriangledown f(a) = 0\}$.

Vezmu $f \in C^2(U)$. Pak matice

$$H_f(a) = \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(a)\right)_{i,j=1}^m$$

(tzv. **Hessova matice**) bude symetrická.

Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická. Vezměme její kvadratickou formu:

$$xAx^T = P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Pak A je pozitivně (negativně) definitní, pokud

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\} : P(x) > 0$$

(resp. $P(x) < 0$), a pozitivně (negativně) semidefinitní, pokud:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : P(x) \geq 0$$

Matice A je indefinitní, pokud není pozitivně ani negativně semidefinitní, tedy:

$$\exists\, x, y \in \mathbb{R}^n : P(x) > 0 \wedge P(y) < 0$$

VĚTA 13 ():

Mějme $U \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon U \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(U)$. Pak vezmeme-li nějaký bod $a \in U$:

- **(i)** $\bigtriangledown f(a) \neq \overline{0} \Rightarrow f$ nemá v a lokální extrém (ani neostrý).
- **(ii)** $\bigtriangledown f(a) = \overline{0}, H_f(a)$ je pozitivně (resp. negativně) definitní $\Rightarrow f$ má v a ostré lokální minimum (resp. maximum).
- **(iii)** $\bigtriangledown f(a) = \overline{0}, H_f(a)$ je indefinitní $\Rightarrow f$ nemá v a (zase) ani neostrý lokální extrém.

Neříkáme však nic o semidefinitních maticích.

DŮKAZ:

(i) Nechť např. $\delta_1 f(a) \neq 0$. Pak

$$f(a_1 + h, a_2, \ldots, a_m) = f(a) + \delta_1 f(a) h + o(h)$$

a existuje $\delta > 0$ takové, že

$$-\delta < h < 0 \Rightarrow f(a_1 + h, a_2, \ldots, a_m) < 0$$

nebo naopak

$$0 < h < \delta \Rightarrow f(a_1 + h, a_2, \ldots, a_m) > 0$$

(ii) Nechť $\bigtriangledown f(a) = 0$. f rozvineme v okolí a pomocí Taylorova rozvoje (V.12-) do řady $n = 2$:

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{2} \frac{\delta_1 h_1 + \cdots + \delta_m h_m)^i}{i!} f(a) + o(||h||^2) \qquad h \in \mathbb{R}^m$$

$$i = 1 \rightarrow \bigtriangledown f(a) h = 0$$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}(\delta_1 h_1 + \cdots + \delta_m h_m)^2 f(a) + o(||h||^2)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(a) h_i h_j + o(||h||^2)$$

$$= \frac{1}{2} P(h_1, \ldots, h_m) + o(||h||^2)$$

(kde $P(\ldots)$ je kvadratická forma odpovídající $H_f(a)$)

$$= \frac{1}{2}||h||^2 (P(h_1/||h||, \ldots, h_m/||h||) + o(1))$$

$$= \frac{1}{2}||h||^2 (P(e) + o(1)) \qquad e = e(h) = (h_1/||h||, \ldots, h_m/||h||)$$

Všimněme si, že $||e|| = 1$, tedy $e \in S = \{x \in \mathbb{R}^m : ||x|| = 1\}$.

$$\mu = P(\alpha) = \min_S P(x)$$

$$M = P(\beta) = \max_S P(x)$$

$$\mu \leq P(e) \leq M$$

Přitom $H_f(a)$ (tj. P) je pozitivně definitní, právě když $0 < \mu$, a negativně definitní, právě když $M < 0$.
Nechť $H_f(a)$ je pozitivně definitní. Pak

$$\forall e \in S : P(e) \geq \mu > 0$$

$$\Rightarrow \exists\, \delta > 0,\ \exists\, h \in \mathbb{R}^m : 0 < ||h - a|| < \delta$$

$$\Rightarrow P(e) + o(1) \geq \mu/2 > 0$$

$$\Rightarrow f(a+h) - f(a) > 0$$

a v a je ostré lokální minimum. Stejně pro negativně definitní $H_f(a)$.

(iii) $H_f(a)$ je indefinitní, právě když $\mu < 0 < M$.

$$\exists\,\delta > 0,\ \forall t,\ 0 < t < \delta,\ ||t\alpha|| = t : f(a + t\alpha) - f(a) = \frac{1}{2}t^2(P(\alpha) + o(1)) < \frac{t^2}{2} \cdot \frac{\mu^2}{2} < 0$$

Podobně $f(a + t\beta) - f(a) - \cdots > 0$.

Q.E.D.

Vezměme $D \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon D \to \mathbb{R}$. D buď "kruhovitý útvar" skládající se z $D = U \dot\cup H$ (U je vnitřek, H je hranice). Jaké jsou lokální a globální extrémy funkce f?

V.13- nám pomůže najít lokální extrémy na U ($S = \{a \in U : \triangledown f(a) = \overline{0}\}$), musí ale platit, že $f \in C^2(U)$.

Najít lokální extrémy na H nám pomůžou najít Lagrangovy multiplikátory, o kterých si povíme blíže zanedlouho.

Je-li D kompaktní, f (spojitá) na D nabývá maximum i minimum. Není-li D kompaktní, všimneme si, že umíme-li najít globální maximum, našli jsme i lokální maximum.

Příklad:

Máme $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou jako:

$$f(x, y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2$$

Pak platí:

$$\triangledown f(x, y) = (\delta_x f, \delta_y f) = (-y\sin x - \cos x, 2y + \cos x)$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -y\cos x + \sin x & -\sin x \\ -\sin x & 2 \end{pmatrix}$$

$$S : \triangledown f(x, y) = (0, 0) \Rightarrow S = \{(\pi/2 + k\pi, 0) : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$H_f(\Delta_k) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad n \in \mathbb{N},\ k = 2n + 1$$

$$H_f(\Delta_k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad n \in \mathbb{N},\ k = 2n$$

$$k\text{liché} : P = -x^2 + 2xy + 2y^2 = -(x - y)^2 + 3y^2 \ \textit{(indef.)}$$

$$k\text{sudé} : P = x^2 02xy + 2y^2 = (x - y)^2 + y^2 \ \textit{(poz. def.)}$$

Tudíž pro liché k lokální extrém nemáme, zato sudé k má ostré lokální minimum: $f(s_{2k}) = -3$.

f nemá globální maximum — např. pro $f(\pi/2, y) = y^2 - 3 \to_{y\to\pm\infty} +\infty$ (f není shora omezená). Alternativně to plyne z toho, že f nemá lokální maximum.

Ale co globální minimum? f je 2π-periodická v x, stačí se tedy na $f(x, y)$ dívat jen v pásu $0 \le x \le 2\pi$:

$$f(0, y) = f(2\pi, y) = y^2 + y - 2 = (y + 1/2)^2 - 9/4 \ge -9/4 > -3 \ \textit{(hranice pásu)}$$

$$x \in \mathbb{R},\ |y| \ge 2 \Rightarrow f(x, y) \ge y^2 - |y| - 3 = (y \pm 1/2)^2 - 13/4 \ge 9/4 \ge -1 > -3$$

Tedy s_{2k} jsou všechny body, v nichž f nabývá své globální minimum -3.

Implicitní funkce

Mějme soustavu funkcí

$$\begin{aligned} F_1(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n) &= 0 \\ F_2(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n) &= 0 \end{aligned}$$

a bod $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^{m+n}$, $F_i(x_0,y_0)=0$ (pro $1\le i\le n$).

To vše můžeme mít, právě když

$$y_i = f_i(x_1,\dots,x_m) \qquad 1\le i\le n$$

(lokálně v okolí (x_0,y_0)).

Zaveďme si značení:

$$F_i = F_i(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n) \qquad f_i = f_i(x_1,\dots,x_m)$$

$$F = (F_1,\dots,n) \qquad f = (f_1,\dots,n)$$

$$x = (x_1,\dots,x_m) \qquad y = (y_1,\dots,y_n)$$

$$F'_x(x,y) = \begin{pmatrix} \delta F_1/\delta x_1 & \cdots & \delta F_1/\delta x_m \\ \vdots & & \vdots \\ \delta F_n/\delta x_1 & \cdots & \delta F_n/\delta x_m \end{pmatrix}(x,y)$$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \delta f_1/\delta x_1 & \cdots & \delta F_1/\delta x_m \\ \vdots & & \vdots \\ \delta f_n/\delta x_1 & \cdots & \delta f_n/\delta x_m \end{pmatrix}(x)$$

$$F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} \delta F_1/\delta y_1 & \cdots & \delta F_1/\delta y_n \\ \vdots & & \vdots \\ \delta F_n/\delta y_1 & \cdots & \delta F_n/\delta y_n \end{pmatrix}(x,y)$$

VĚTA 14 (o implicitních funkcích):

Mějme $F=(F_1,\dots,F_n): W\to\mathbb{R}^n$ jako zobrazení definované na okolí $W\subset\mathbb{R}^{m+n}$ bodu (x_0,y_0) (kde $x_0\in\mathbb{R}^m$, $y_0\in\mathbb{R}^n$) splňující následující podmínky:

(i) $F_i\in C^1(W)$ pro $1\le i\le n$

(ii) $F_i(x_0,y_0)=0$ pro $1\le i\le n$

(iii) $\det F'_y(x_0,y_0)\ne 0$

Potom existují okolí $x_0\in U\subset\mathbb{R}^m$, $y_0\in V\subset\mathbb{R}^n$ taková, že $U\times V\subset W$ a zároveň

$$\forall x\in U\ \exists!\, y\in V: F_i(x,y)=0 \qquad 1\le i\le n$$

Tj. existuje zobrazení $f=(f_1,\dots,f_n)\colon U\to V$ takové, že

$$\forall (x,y)\in U\times V: F(x,y)=\overline{0} \Leftrightarrow y=f(x)$$

a navíc $f_i\in C^1(U)$ pro $1\le i\le n$. Tedy zobrazení f je diferencovatelné v $\forall x\in U$ a zároveň

$$f'(x) = -F'_y(x,f(x))^{-1}\cdot F'_x(x,f(x))$$

T-O-D-O: nějak hezky navázat, tady věta samotná končí... co to tu vlastně je? ;-)

$$F_k(x_1, \ldots, x_m, f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 0 \qquad 1 \le k \le n,\ x \in U$$

$$\frac{\delta F_k}{\delta x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta F_k}{\delta y_j} \frac{\delta f_j}{\delta x_i} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \delta F_1/\delta y_1 & \cdots & \delta F_1/\delta y_n \\ \vdots & & \vdots \\ \delta F_n/\delta y_1 & \cdots & \delta F_n/\delta y_n \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \delta f_1/\delta x_i \\ \vdots \\ \delta f_n/\delta x_i \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \delta F_1/\delta x_i \\ \vdots \\ \delta F_n/\delta x_i \end{pmatrix}$$

$$\delta f_j/\delta x_i = - \frac{\begin{pmatrix} \cdots & \delta F_1/\delta x_i & \cdots \\ & \vdots & \\ & \delta F_n/\delta x_i & \end{pmatrix}}{\det(F'_y(x, f(x)))} = - \frac{\det(A')}{\det(A)}$$

(v čitateli zaměníme j-tý sloupec).

VĚTA 15 (o inverzních funkcích):

Mějme $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, otevřenou $U \subset \mathbb{R}^m$, $x_0 \in U$ (označme $y_0 = f(x_0)$). Nechť f splňuje $f \in C^1(U)$,

$$\det(\delta_{xj} f_i(x_0))_{i,j=1}^{m} \neq 0$$

Pak existují okolí $x_0 \in U' \subset \mathbb{R}^m$, $y_0 \in V \subset \mathbb{R}^m$ taková, že $f\colon U' \to V$ je bijekce, $f^{-1} \in C^1(V)$ a zároveň

$$\forall x \in U', y = f(x) \in V : Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}$$

(a podobně i pro Jacobiho matice).

DŮKAZ:

Plyne z V.14-. Vezměme $x = x_1, \ldots, x_m$, $y = y_1, \ldots, y_m$:

$$F(x, y) = f(x) - y$$

$$x_i = g_i(y_1, \ldots, y_m) \Rightarrow F(x, y) = \overline{0} \qquad 1 \le i \le m$$

Předpoklady V.14- jsme tak tedy splnili (F je C^1, $F(x_0, y_0) = \overline{0}$, determinant je také nulový).
Mám okolí $y_0 \in V \subset \mathbb{R}^m$, $g\colon V \to U$ takové, že

$$\forall y \in V : f(x) - y = 0 \Leftrightarrow x = g(y)$$

$$\Rightarrow f(g(y)) = y \Rightarrow g = f^{-1}$$

Vezmu $U' := g(V)$. Pak $f\colon U' \to V$ a $g\colon V \to U'$. U' je okolí x_0, protože U' je $f^{-1}(V)$.
Q.E.D.

Poznámka:

Mějme $f\colon U' \to V$, $U, V \in \mathbb{R}^m$, f je bijekce, $f \in C^1(U')$, $f^{-1} \in C^1(V)$. Takovému zobrazení říkáme **difeomorfismus**.

Mějme $U \subset \mathbb{R}^m$ otevřenou, $f\colon U \to \mathbb{R}$, $F_i\colon U \to \mathbb{R}$ ($1 \le i \le n < m$). Nechť $f, F_i \in C^1(U)$:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^m : F_1(x) = \cdots = F_n(x) = 0\}$$

Jak najít lokální extrémy f na H?

VĚTA 16 (Lagrangeovy multiplikátory):

$a \in H$ buď bod lokálního extrému, f na H. Mějme matici $(\delta_{xj} F_i(a))_{i,j=1}^{n,m}$ mající maximální hodnost (tj. n, neboli $\bigtriangledown F_1(a), \dots, \bigtriangledown F_n(a)$ jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^m$). Potom existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ taková, že:

$$\bigtriangledown f(a) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bigtriangledown F_i(a) = \overline{0}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta f}{\delta x_j}(a) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\delta F_i}{\delta x_j}(a) = 0 \qquad 1 \le j \le m$$

DŮKAZ:

Bez újmy na obecnosti nechť:

$$\det(\delta_{x_{m-n+1}} F(a), \delta_{x_{m-n+2}} F(a), \dots, \delta_{x_m} F(a)) \neq 0$$

$$x_1, \dots, x_m = \underbrace{x_1, \dots, x_{m-n}}_{y}, \underbrace{x_{m-n+1}, \dots, x_m}_{z}$$

$$a = (\underbrace{a_1, \dots, a_{m-n}}_{y_0}, \underbrace{a_{m-n+1}, \dots, a_m}_{z_0})$$

Pak podle V.14- existuje zobrazení $g = (g_1, \dots, g_n)$ definované na okolí y_0 takové, že (lokálně) platí:

$$F_i(y, z) = 0 \Leftrightarrow z = g(y) \qquad 1 \le i \le n$$

Nyní předpokládáme, že funkce

$$h(y) := f(y, g_1(y), \dots, g_n(y))$$

má v bodě y_0 lokální extrém, bez vazby, neboli $\bigtriangledown h(y_0) = \overline{0}$:

$$\frac{\delta f}{\delta y_i}(y_0, g(y_0)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta z_j}(y_0, g(y_0)) \cdot \frac{\delta g_j}{\delta y_i}(y_0) = 0 \qquad 1 \le i \le m - n$$

$$D_y f(y_0, g(y_0)) + D_z f(y_0, g(y_0)) \cdot Dg(y_0) = 0$$

Podle V.14- si ale můžeme $Dg(y_0)$ spočítat:

$$Dg(y_0) = -(D_z F(y_0, g(y_0)))^{-1} \cdot D_y F(y_0, g(y_0))$$

$$D_y f - \underbrace{D_z f \cdot (D_z F)^{-1}}_{\lambda} \cdot D_y F = \overline{0}$$

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D_z f \cdot (D_z F)^{-1}$$

$$D_y f - \lambda D_y F = \overline{0}$$

$$D_z f - \lambda D_z F = \overline{0}$$

$$\Rightarrow Df - \lambda DF = 0$$

Q.E.D.

Poznámky:

(i) Jaký je geometrický význam této věty? Mějme $a \in H$ jako bod lokálního extrému f na H. V tom případě

$$\bigtriangledown f(a) \in \mathrm{Lin}(\{\bigtriangledown F_1(a), \dots, \bigtriangledown F_n(a)\})$$

(kde Lin je lineární obal). Všimněme si, že tohle platí triviálně pro $\bigtriangledown f(a) = \overline{0}$. Jak je to ale v případě, že $\bigtriangledown f(a) \neq \overline{0}$?

$$TN_a = \{x \in \mathbb{R}^m : x \perp \bigtriangledown f(a) \Leftrightarrow \langle \bigtriangledown f(a), x \rangle = 0\}$$

je tečný prostor (posunutý od počátku) k ploše

$$N = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) = f(a)\}$$

v bodě a (s dimenzí $m - 1$).

Mějme plochu

$$H = \{x \in \mathbb{R}^m : F_1(x) = \cdots = F_n(x) = 0\}$$

$$TH_a = \{x \in \mathbb{R}^m : \langle \bigtriangledown F_1(a), x \rangle = \cdots = \langle \bigtriangledown F_n(a), x \rangle = 0\}$$

pak bude tečný prostor k ploše H v bodě a (s dimenzí $m - n$).

Pak se dá V.16- přeformulovat jako: má-li f v a lokální extrém vzhledem k H, pak

$$TH_a \subset TN_a$$

(ii) Vezměme si **Lagrangovu funkci**:

$$L(x, \lambda) = L(x_1, \ldots, x_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x)$$

$$\bigtriangledown L = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\delta F_i}{\delta x_1}(x), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_m}(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\delta F_i}{\delta x_m}(x), -F_1(x), \ldots, -F_n(x) \right)$$

$$\bigtriangledown L(x, \lambda) = \overline{0} \Longleftrightarrow \bigtriangledown f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bigtriangledown F_i(x) \ \wedge \ F_1(x) = \cdots = F_n(x) = 0 \ \ (tj.\ x \in H)$$

Tedy V.16- lze přeformulovat také jako: má-li f v a lokální extrém vzhledem k H, pak

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^n : \bigtriangledown L(a, \lambda) = \overline{0}$$

VĚTA 17 ():

Mějme otevřenou $U \subset \mathbb{R}^m$, $f, F_i \in C^2(U)$, $1 \le i \le n < m$,

$$H = \{x \in \mathbb{R}^m : F_1(x) = \cdots F_n(x) = 0\}$$

a pro $\forall x \in U$ má matice $(\delta_{xj} F_i(x))_{i,j=1}^{n,m}$ maximálně hodnost n, $a \in H$ a $\bigtriangledown f(a) \neq \overline{0}$. Pak platí:

(i) Pokud pro $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ máme $\bigtriangledown L(a, \lambda) \neq \overline{0}$, pak f v a nemá lokální extrém vzhledem k H. (Důsledek V.16-.)

(ii) Nechť $\lambda \in \mathbb{R}^n$ splňuje $\bigtriangledown L(a, \lambda) = \overline{0}$. Pokud kvadratická forma

$$P(h_1, \ldots, h_m) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\delta^2 L}{\delta x_i \delta x_j}(a, \lambda) h_i h_j$$

je pozitivně (negativně) definitní na vektorech $h \in TH_a$, pak f má v a ostré lokální minimum (maximum) vzhledem k H.

(iii) Pokud je tato kvadratická forma indefinitní, f nemá v a lokální extrém vzhledem k H.

Základní věta algebry

Každý nekonstantní polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$
$$a_i \in \mathbb{C},\ n \geq 1,\ a_n \neq 0$$

má alespoň jeden komplexní kořen.

Podívejme se, jak bychom něco takového dokazovali s využitím našich současných znalostí kolem extrémů funkcí více proměnných.

Chceme tedy najít číslo $z_0 \in \mathbb{C}$ takové, že $p(z_0) = 0$.

Vezměme $f(z) = |p(z)|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+$. Přitom $\mathbb{C}$ chápeme jako $\mathbb{R}^2$, tzn. $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$. Jinak řečeno $f(z)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$. Všimněme si, že f je spojitá:

$$|p(z)| = |p(a+bi)| = \sqrt{r(a,b)^2 + s(a,b)^2} \qquad r, s \in \mathbb{R}[x,y]$$

Plán boje:

(i) Nejdříve ověřme, že f nabývá na $\mathbb{C}$ (tedy $\mathbb{R}^2$) minima, tj.:

$$\min_{z \in \mathbb{C}} |p(z)| = |p(z_0)| \qquad z_0 \in \mathbb{C}$$

(ii) Vezměme nějaké $u \in \mathbb{C}$. Pak by mělo platit:

$$f(u) > 0 \Longrightarrow \exists\, u' \in \mathbb{C} : f(u') < f(u)$$

Platí-li pak (i) i (ii), globální minimum z_0 z (i) už je kořen p a platí $p(z_0) = 0$.

(i) Vezměme si poloměr

$$R := \max\left(1, \frac{2(|a_0|+1)}{|a_n|}, \frac{2n}{|a_n|} \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|\right)$$

a podívejme se, co se stane, zvolíme-li komplexní číslo větší než tento poloměr:

$$\begin{aligned}
|z| > R \Longrightarrow |p(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0| \\
&= |z|^n |a_n + a_{n-1}/z + \cdots + a_0/z^n| \\
&\geq |z|^n \left(|a_n| - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i/z^{n-i}|\right) \\
&\geq |z| \left(|a_n| - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|/|z|\right) \\
&\geq |z| \left(|a_n| - \frac{n \cdot \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i|}{|z|}\right) \\
&\geq z \frac{|a_0|+1}{|a_n|} \frac{|a_n|}{2} = |a_0| + 1
\end{aligned}$$

(Pozor, tento řetěz nerovností platí pouze, je-li $z \geq 1$, ale na to už jsem myslel při definici R.) Tedy jsem právě dokázal, že

$$|z| > R \Longrightarrow |p(z)| \geq |a_0| + 1 > |a_0| = |p(0)|$$

Vezmu-li si kruh $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \mathbb{R}\}$, bude to kompaktní množina, a z toho, co jsme si právě dokázali, plyne:

$$\inf_{z \in \mathbb{C}} |p(z)| = \inf_{K} |p(z)| = |p(z_0)| \qquad z_0 \in K$$

(Poslední rovnost platí, neboť K je kompaktní a $f(z)$ je spojitá.)

(ii) Mějme $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Vzpomeňme si na alternativní zápis komplexních čísel:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \qquad r = |z| > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi),\ \varphi = \arg(z)$$

Mám-li $u, v \in \mathbb{C}$, $0 < |u| < |v|$, platí:

$$|\arg(u) - \arg(v)| = \pi \Longrightarrow |u + v| = |v| - |u|$$

LEMMA:

Zvolme $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$. Pak platí, že

$$az^n\colon \{z \in \mathbb{C} : |z| < (r/|a|)^{1/n}\} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$$

je zobrazení *na* (surjektivní).

DŮKAZ:

Nechť $z \in B$. Pak je-li $z = 0$, $z = a \cdot 0^n$, jinak

$$z_0 = \frac{|z|^{1/n} e^{i\arg(z)/n}}{|a|^{1/n} e^{i\arg(a)/n}}$$

a tudíž $az_0^n = z$.
Q.E.D.

$u \in \mathbb{C}$, $f(u) > 0$, tj. $|p(u)| > 0$, tj. $p(u) \neq 0$. $p(z)$ vyjádříme (se vzpomínkou na p. Taylora) takto:

$$p(z) = b_0 + b_1(z - n) + \cdots + b_n(z - n)^n \qquad b_i \in \mathbb{C}$$

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

T-O-D-O: Následující text asi mlží. To je ale lineární podle nějakého k v bázi $\{1, z, z^2, \ldots\}$. Vyjádříme to v jiné bázi:

$$\{1, z - n, (z - n)^2, \ldots\}$$

Jak vypadají koeficienty?

$$b_0 = p(n) \neq 0 \qquad b_n = a_n \neq 0$$

Vezměme nejmenší $k \geq 1$ takové, že $b_k \neq 0$:

$$p(z) = b_0 + b_k(z - n)^k + \sum_{i=k+1}^{n} b_i(z - n)^i = b_0 + p_1(z) + p_2(z)$$

Pro $z \to u$ mám $p_2(z) = o(p_1(z))$. Vezmu $\delta > 0$ takové, aby

$$|z - u| < \delta \Rightarrow |p_2(z)| \leq |p_1(z)|/2$$

Zvolím $r > 0$ tak malé, aby $r < |b_0|$ a $(r/|bk|)^{1/k} < \delta$. Zvolím $c \in \mathbb{C}$ takové, že $0 < |c| < r < |b_0|$ a c je opačné k b_0. Podle lemmatu existuje $u' \in \mathbb{C}$ takové, že

$$0 < |u' - u| < (r/|bk|)^{1/k} < \delta \wedge p_1(u') = c$$

$$|p(u')| = |b_0 + p_1(u') + p_2(u')| \overset{\triangle}{\leq} |b_0 + c| + |p_2(u')|$$

$$= |b_0| - |c| + |p_2(u')| < |b_0| - |c|/2 < |b_0| = |p(u)|$$

Q.E.D.

Obyčejné diferenciální rovnice

Úvod

Diferenciální rovnice se používají zejména velmi často pro modely ve fyzice, biologii, ekonomii, ...

Vzpomeneme-li si na Newtonův zákon síly, ten můžeme zapsat jako:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \qquad x = x(t)$$

$$F = \left(t, x(t), \frac{dx}{dt}\right)$$

V jednoduchém případě $F = -mg$. Vezměme F konstantní, pak takovouto jednoduchou diferenciální rovnici můžeme vyřešit jako

$$x(t) = -gt^2/2 + c_1t + c_2$$

Máme dva typy diferenciální rovnic - obyčejné a parciální. Parciálními rovnicemi se zde zabývat nebudeme, jen si ukážeme několik jejich příkladů:

(i) Máme-li $u = u(x, y)$, Laplaceova rovnice potenciálu říká:

$$\frac{\delta^2u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2u}{\delta y^2} = 0$$

(ii) Máme-li $u = u(x, t)$, rovnice difúze (vedení tepla) zní takto:

$$\frac{\delta^2u}{\delta x^2} = \frac{\delta u}{\delta t}$$

(iii) Máme-li opět $u = u(x, t)$, vlnová rovnice říká:

$$a^2\frac{\delta^2u}{\delta x^2} = \frac{\delta^2u}{\delta t^2}$$

Naopak dobrý příklad obyčejné diferenciální rovnice je rovnice radioaktivního rozpadu:

$$\frac{dR}{dt} = -kR \qquad R = R(t)$$

Obecný tvar diferenciální rovnice vypadá takto:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y(n)) = 0$$

$y = y(x)$ je neznámá funkce, F je tzv. rovnicová funkce $n + 2$ proměnných. n je pak **řád rovnice**.

Diferenciální rovnice můžeme také rozdělit na lineární a nelineární, v závislosti na linearitě F — tj. mám rovnici

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

kde $a_i(x)$, $b(x)$ jsou zadané funkce.

Je-li F polynom, dostanu **algebraickou** diferenciální rovnici:

$$(y^{(3)})^2 + 2y' - x^3 = 0$$

Mějme kyvadlo na šňůrce dlouhé l, zajímá nás závislost úhlu Θ na čase t. To je příklad nelineární (a dokonce nealgebraické) diferenciální rovnice:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\Theta = 0$$

Pro malá Θ lze však aproximovat $\sin\Theta \approx \Theta$, čímž již dostaneme lineární diferenciální rovnici druhého řádu:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\Theta = 0$$

I v říši diferenciálních rovnic můžeme potkat implicitní funkce. Ty řešíme vzhledem k $y^{(n)}$, tj.:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

Přitom samotná řešení diferenciálních rovnic (zejména nelineárních) vycházejí často jako implicitní funkce.

Příklad:

Mějme $y = y(x)$ a diferenciální rovnici $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$. Tu řeší implicitní funkce daná rovnicí

$$y^3 + 4y - x^3 + c = 0$$

$$0 = 3y^2y' + 3y' - 3x^2 \Longrightarrow y' = \frac{x^2}{1+y^2}$$

Řešení diferenciální rovnice je dvojice (y, I), kde $y = y(t)$ je funkce definovaná na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a řeší zadanou diferenciální rovnici. (Řešení může být i více, např. $y' = 0$ má nekonečně mnoho řešení: $y(x) = c$.)

$(\overline{y}, J)$ je **rozšířením řešení** (y, I), pokud $J \supset I$, $x \in I \Rightarrow \overline{y}(x) = y(x)$. **Maximální řešení** je takové, které už se nedá rozšířit.

VĚTA 1 (Picard):

Připomeňme si Picardovu větu, tentokráte v řeči diferenciálních rovnic. Vezměme si diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x) &= f(x, y) \end{aligned}$$

Mějme otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, bod $(x_0, y_0) \in \Omega$ a spojitou funkci $f \in C(\Omega)$ na Ω lokálně lipschitzovskou vzhledem k y.

Pak má rovnice lokálně jednoznačné řešení, tj.

$$\exists\, h > 0,\ \exists!\, y(x) \in C^1(x_0 - h, x_0 + h) : \begin{array}{c} y(x_0) = y_0 \\ y'(x) = f(x, y) \end{array}$$

(na intervalu $(x_0 - h, x_0 + h)$).

Přitom funkce bude **"lokálně lipschitzovská"**, pokud každý bod z Ω má okolí U a konstantu $k > 0$ takovou, že:

$$(x, y), (x, \overline{y}) \in U \Rightarrow |f(x, y) - f(x, \overline{y})| < K|y - \overline{y}|$$

Všimněme si přitom, že $\frac{\delta f}{\delta y} \in C(\Omega) \Rightarrow f$ je lokálně lipschitzovská na Ω.

Důkaz: Už byl. *Q.E.D.*

VĚTA 2 (Peano):

Zredukujeme-li předpoklady pouze na $f \in C(\Omega)$, dostaneme pouze existenci (ne vždy je zaručena jednoznačnost).

Důsledek V1

Mějme (y_1, I) a (y_2, J), které řeší $y' = f(x, y)$ a $y_1(a) = y_2(a)$ pro nějaké $a \in I \cap J$. Pak ovšem $y_1 = y_2$ na $I \cap J$.

Příklad:

Mějme $y(x)$ v $\mathbb{R}$,

$$y(0) = 0$$
$$y' = xy^{2/3}$$

Pak však následující počáteční podmínky dávají nejednoznačnost:

$$y_1 = 0$$
$$y_2(x) = (x^2/6)^3 = x^6/6^3$$

Postupy řešení rovnic

(1) Lineární rovnice

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad y = y(x),\ a, b \in C(I)$$

(i) Integračním faktorem:
Hledáme **integrační faktor** $c = c(x)$ takový, že

$$c \cdot LS = (c \cdot y')$$
$$c \cdot (y' + ay) = (c \cdot y')$$
$$c \cdot a = c'$$

$$c'/c = a \Rightarrow (\log c)' = a \Rightarrow c = c(x) = e^A \Rightarrow A = \int a$$

$$(cy)' = c \cdot LS = c \cdot PS = cb$$
$$(cy)' = cb \Rightarrow cy = \int cb$$

Položme $cy = D$, kde D je primitivní funkce k cb.

$$y(x) = D/c = e^{-A} \int e^{A(x)} b(x)\, dx$$

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} b(x)\, dx + c \right)$$

$$A(x) = \int a(x)\, dx$$

(ii) Variací konstant:
Máme homogenní rovnici $y' + ay = 0$, tj.

$$y'/y = -a \Rightarrow (\log y)' = -a \Rightarrow \log y = -A + c \Rightarrow y(x) = Ke^{-A(x)}$$

kde K je nějaká konstanta, $K = K(x)$. Jak bude vypadat?

$$(Ke^{-A})' + a(Ke^{-A}) = b$$
$$K'e^{-A} = b$$

$$K' = be^A \Rightarrow K = \int be^A + c$$

Dosaďme toto do původní rovnosti:

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} b(x)\, dx + c \right)$$

$$A(x) = \int a(x)\, dx$$

Příklad:

Odvodíme si vzorec pro volný pád. Mějme částici o hmotnosti $m > 0$ a odpor povětří kv (kde $k > 0$ je konstanta). Působí proti sobě tedy dvě síly, mg a kv. Dle pana Newtona:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

$$v' + v(k/m) = g$$

Protože k/m a g jsou konstanty, jako integrační faktor dostaneme $c = e^{kt/m}$, $a(x) = k/m$, $b(x) = g$. Tedy řešení bude

$$v(t) = mg/k + c_1 e^{-kt/m}$$

Vezměme jako počáteční podmínku $v(0)$. Tedy $c_1 = -mg/k$,

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-kt/m} \right)$$

Pro $t \to +\infty$ dostáváme limitní rychlost

$$v_{\text{lim}} = \frac{mg}{k}$$

(2) Rovnice se separovanými proměnnými:

$$y' = f(x)g(y)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y'/g(y) &= f(x) \\ G(t) &= \int dt/g(t) \\ G(y(x))' &= f(x) \\ G(y(x)) &= F(x) + c \\ F(x) &= \int f(x)\, dx \end{aligned}}$$

Zapisujeme jako:

$$dy/dx = f(x)g(y) \qquad dy/g(y) = f(x)\, dx$$

$$\int dy/g(y) = \int f(x)\, dx$$

Příklady:

(i) Mějme $y' = \dfrac{x^2}{1+y^2}$. Pak:

$$(1+y^2)\, dy = x^2\, dx \qquad y = y(x)$$

$$y + y^3/3 = x^3/3 + c$$

$$y^3 + 3y - x^3 + c = 0$$

(ii) Zkusme odvodit únikovou (druhou kosmickou) rychlost. Mějme hmotný bod o hmotnosti m ve výšce x nad povrchem země o poloměru R. Jak vypadá tíže F?
Newtonův gravitační zákon nám říká, že

$$F = \frac{K}{(x+R)^2}$$

kde K je konstanta — položme $x = 0$, pak

$$mg = K/R^2 \Rightarrow K = mgR^2$$

$$F = \frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

Vezměme rychlost v čase t jako $v = v(t)$ a polohu $x = x(t)$. Pak dle pana Newtona

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

Abychom dostali jen jednu neznámou, od t přejdeme k nezávislé proměnné x — zderivujme v jako složenou funkci:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\cdot\frac{dv}{dx}$$

Přepišme tedy naši původní rovnici bez t:

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}$$

V této rovnici již ale máme separované proměnné!

$$v\,dv = -\frac{gR^2\,dx}{(x+R)^2}$$

$$v^2/2 = \frac{gR^2}{x+R} + c$$

Vezměme počáteční podmínku

$$t = 0\colon v = v_0,\ x = 0 \Rightarrow v(0) = v_0$$

Pak nutně

$$c = v_0^2/2 - gR$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R}$$

Chceme v_0 zvolit takové, aby $v(x)$ byla definovaná pro $\forall x > 0$. Tedy v^2 by mělo být nezáporné, tzn. $v_0^2 \geq 2gR$. Úniková rychlost je tudíž

$$v_0 = \sqrt{2gR}$$

(3) Exaktní rovnice:

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

Takovou rovnici bychom uměli snadno vyřešit, existovala-li by funkce $\varphi = \varphi(x,y)$ taková, že $\delta_x\,\varphi = M$, $\delta_y\,\varphi = N$:

$$\varphi(x, y(x))' = 0$$

Pak řešení původní rovnice je dané implicitně jako

$$\varphi(x, y(x)) = c$$

Nechť $M, N, \delta_y M, \delta_x N$ jsou spojité na nějakém obdélníku $R = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$. Pak

$$\exists\, \varphi : \underbrace{\delta_x \varphi = M,\ \ \delta_y \varphi = N}_{(*)} \Rightarrow \delta_y M = \delta_x N$$

(protože $\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta y \delta x}$).

Nechť naopak $\delta_y M = \delta_x N$, chceme φ splňující vztahy $(*)$. Vezměme $\delta_x \varphi = M$ a zintegrujme podle x (pro pevné y). To nám dává

$$\varphi(x, y) = \int^x M(t, y)\, dt + \psi(y)$$

Aby $\delta_y \varphi = N$, musím mít:

$$N = \frac{\delta \varphi}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y} \int^x M(t, y)\, dt + \frac{d\psi}{dy} = \int^x \frac{\delta M}{\delta y}(t, y)\, dt - \frac{d\psi}{dy}$$

$$\frac{d\psi}{dy} = N(x, y) - \int^x \frac{\delta M}{\delta y}(t, y)\, dt$$

To je však funkce pouze podle y — když to zderivuji podle x, dostanu $\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y} = 0$.

$$\psi(y) = \int^y \left(N(x, y) - \int^x \frac{\delta M}{\delta y}(t, y)\, dt \right)$$

$$\varphi(x, y) = \int^x M(t, y)\, dt + \int^y \left(N(x, s) - \int^x \frac{\delta M}{\delta y}(t, y)\, dt \right) ds$$

Příklad:

$$\underbrace{(y \cos x + 2x e^y)}_{M} + \underbrace{(\sin x + x^2 e^y + 2)}_{N} \frac{dy}{dx} = 0$$

⟨cvičení⟩

$M(x, y) + N(x, y) y' = 0$ je exaktní, právě když existuje $\varphi = \varphi(x, y)$ takové, že $\delta_x \varphi = M$, $\delta_y \varphi = N$ $(\varphi(x, y(x)))' = 0$, tj. $\varphi(x, y(x)) = c$). To si dokážeme v následujícím tvrzení.

VĚTA 4 ():

Mějme $M, N, \delta_y M, \delta_x N \colon R \to \mathbb{R}$ nechť jsou spojité, $R = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$. Rovnice

$$M(x, y) + N(x, y) y' = 0$$

je exaktní, právě když na R platí $\delta_y M = \delta_x N$. Je-li podmínka splněna, potom funkce

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y)\, ds + \int_{y_0}^y \underbrace{\left(N(x, t) - \int_{x_0}^x \frac{\delta M}{\delta y}(s, t)\, ds \right)}_{h(x,t)} dt$$

splňuje na R vztahy $\delta_x \varphi = M$, $\delta_y \varphi = N$ (kde $(x_0, y_0) \in R$ je libovolně zvolený bod).

DŮKAZ:

Nechť φ existuje. Pak dle V2.10-:

$$\delta_y M = \delta^2_{xy} \varphi = \delta^2_{yx} \varphi = \delta_x N$$

Opačná implikace bude ale trochu pracnější. Nechť na R platí $\delta_y M = \delta_x N$:

$$\delta_x h(x_1, t) = \delta_x N(x_1, t) - \delta_y M(x_1, t) = 0$$

(podle předpokladů). t je pevné, tedy $h(x, t)$ je konstantní. $h(x, y)$ závisí jen na y, tudíž

$$\delta_x \varphi(x_1, y) = M(x_1, y)$$

a proto $\delta_x \varphi = M$.

Ještě nám však zbývá druhá rovnost. Položme

$$g(x, y) := \int_{x_0}^{x} M(s, y)\, ds$$

a všimněme si, že máme-li pro nějaké $(x, y_1) \in R$ rovnost

$$\delta_y g(x, y_1) = \int_{x_0}^{x} \delta_y M(s, y_1)\, ds$$

máme již vyhráno:

$$\delta_y \varphi(x, y_1) = \delta_y g(x, y_1) + N(x, y_1) - \int_{x_0}^{x} \frac{\delta M}{\delta y}(s, y_1)\, ds$$

$$\delta_y \varphi(x, y_1) = N(x, y_1)$$

$$\delta_y \varphi = N$$

Jak ale dokázat onu předokládanou rovnost? Mějme $x \geq x_0$, $h > 0$ $(y_1 + h < \delta)$. Existuje funkce $\Theta = \Theta(s)$ taková, že

$$M(s, y_1 + h) - M(s, y_1) - h\delta_y M(s, y_1 + \Theta(s))$$

(to nám říká za předpokladu $\exists\, s \in [x_0, x] \Rightarrow 0 < \Theta(s) < h$ Lagrangova věta o střední hodnotě).

$$\frac{g(x, y_1 + h) - g(x, y_1)}{h} = \int_{x_0}^{x} \frac{M(s, y_1 + h) - M(s, y_1)}{h}\, ds = \int_{x_0}^{x} \delta_y M(s, y_1 + \theta(s))\, ds$$

Přitom $\delta_y M$ je stejnoměrně spojitá na kompaktní podmnožině R, tedy pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\eta > 0$ takové, že $s \in [x_0, x] \wedge \Theta \in [0, \eta]$. To ovšem znamená, že

$$|\delta_y M(s, y_1 + \Theta) - \delta_y M(s, y_1)| < \varepsilon$$

Když však $h < \eta$,

$$\left| \int_{x_0}^{x} \delta_y M(s, y_1 + \Theta(s))\, ds - \int_{x_0}^{x} \delta_y M(s, y_1)\, ds \right| \leq \int_{x_0}^{x} |d_y M(s, y_1 + \Theta(s)) - \delta_y M(s, y_1)|\, ds < \varepsilon(x - x_0)$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{g(x, y_1 + h) - g(x, y_1)}{h} - \int_{x_0}^{x} \delta_y M(s, y_1)\, ds \right| < \varepsilon(x - x_0)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x, y_1 + h) - g(x, y_1)}{h} = \int_{x_0}^{x} \delta_y M(s, y_1)\, ds$$

Q.E.D.

Rovnice vyšších řádů

$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ (kde $y = y(x)$) platí na $I \subset \mathbb{R}$, právě když $y_1 = y'$, $y_2 = y_1'$, $\ldots$, $y_n = y_{n-1}'$, $F(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ a $y, y_1, \ldots, y_n$ jsou na F řešením této soustavy.

Tedy místo vícenásobných derivací jsme si zavedli nějaké další pomocné funkce, vždyť přeci $y'' = (y')'$.

Lineární diferenciální rovnici n-tého řádu

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y + b = 0 \qquad a_i = a_i(x)$$

můžeme tímto triviálním způsobem převést na lineární soustavu

$$y_1 = y' \quad y_2 = y_1' \quad \ldots \quad y_n = y_{n-1}'$$

$$y_n + a_{n-1} y_{n-1} + \cdots + a_1 y_1 + a_0 y + b = 0$$

diferenciálních rovnic prvního řádu.

Soustava lineárních rovnic se ovšem dá řešit pomocí matic. Pro naši soustavu $y' = Ay + b$, neboli

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{1,1}y_1 + \cdots + a_{1,n}y_n + b_1 \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n,1}y_1 + \cdots + a_{n,n}y_n + b_n \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{i,j} &= a_{i,j}(x) \\ b_i &= b_i(x) \end{aligned}\right. : I \to \mathbb{R} \text{ spojité}$$

kde $y_1, \ldots, y_n$ jsou neznámé funkce, můžeme vyrobit tyto matice:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad A\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n} \qquad b\colon I \to \mathbb{R}^n$$

VĚTA 5 ():

Buď $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval, $a_{i,j}, b_i\colon I \to \mathbb{R}$ spojité, $1 \le i, j \le n$, $A := (a_{i,j})$, $b := \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}^T$, $x_0 \in I$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$.

Pak soustava $y' = Ay + b$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y^0$ má na I jediné řešení.

Důkaz: Dělat nebudeme. Lze dokázat pomocí věty o kontrahujícím zobrazení. *Q.E.D.*

Definice:

Připomeňme si, že $C^1(I) = \{f : f$ má na I spojitou první derivaci$\}$. Budeme pracovat ve vektorovém prostoru $C^1(I)^n$ (n-tic takových funkcí) nad $\mathbb{R}$.

$$H := \{y = (y_1, \ldots, y_n) : y \text{ je na } I \text{ řešení homogenní soustavy } y' = Ay\ \}$$

$$M := \{y = (y_1, \ldots, y_n) : y \text{ je na } I \text{ řešení nehomogenní soustavy } y' = Ay + b\ \}$$

VĚTA 6 ():

H je vekotorvý podprostor $C^1(I)^n$ dimenze n, M je afinní podprostor $C^1(I)^n$ dimenze n, a navíc $M = H + y$ pro každé $y \in M$.

DŮKAZ:

Má-li být H vektorový prostor, pro $y^1, y^2 \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ musí $\alpha y^1 + \beta y^2 \in H$. ($\langle$cvičení$\rangle$proč platí.) Dále pokud $y \in M$ a $h \in M$, $y + h \in M$. ($(y+h)' = y' + h' = Ay + b + Ah = A(y+h) + b$, tj. $y + h \in M$.)

Máme-li zadané $y \in$, $z \in M$ můžeme psát jako $z = y + (z - y)$ a $z - y \in H$, tedy $M = y + H$.

$\dim H = n$ plyne z V.5-: Vezměme libovolný bod $x_0 \in I$; pro $i = 1 \ldots n$ mám $y(i) \in M$ takové, že $y(i)(x_0) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ má jedničku na i-tém místě ((i) je prostě jen další index y). Nechť $y \in H$ je libovolné, položme:

$$y(x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_n \end{pmatrix}$$

$$z := \pi_1 y(a) + \pi_2 y(2) + \cdots + \pi_n y(n) \in H$$

$$z(x_0) = y(x_0) \overset{\text{V.5-}}{\Longrightarrow} z(x) = y(x) \qquad \forall x \in I$$

Takže $y \in \mathit{Lin}(\{y(1), y(2), \ldots, y(n)\}) = H$.

Q.E.D.

Definice:

Bázi H říkáme **fundamentální systém řešení**.
Mějme $f^1, \ldots, f^n : I \to \mathbb{R}^n$. Pak **Wronského determinant** (**wronoskián**) definujeme jako

$$W_{f^1,\ldots,f^n}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} f_1^1(x) & \cdots & f_1^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n^1(x) & \cdots & f_n^n(x) \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}$$

VĚTA 7 ():

Mějme $f^1, \ldots, f^n \in H$ (množina řešení homogenní soustavy $Ay = y'$). Pak pro $W := W_{f^1,\ldots,f^n}$ máme $W(x_0) = 0$ pro nějaké $x_0 \in I$, právě když $W(x) = 0$ pro $\forall x \in I$.

DŮKAZ:

Je-li $W(x_0) = 0$, pro nějaké $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (kde ne všechny $\alpha_i = 0$) platí:

$$\alpha_1 f^1(x_0) + \cdots + \alpha_n f^n(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tedy ale podle V.5- máme

$$\alpha_1 f^1(x) + \cdots + \alpha_n f^n(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

pro $\forall x \in I$. Ale v tom případě $W(x) = 0$ pro $\forall x \in I$.
Opačná implikace je triviální.
Q.E.D.

$f^1, \ldots, f^n$ jsou řešení soustavy $Ay = y'$, $W := W_{f^1,\ldots,f^n}$. Buď $W(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$, pak $\{f^1, \ldots, f^n\}$ je fundamentální systém řešení, nebo $W(x) = 0$ pro $\forall x \in I$ a pak $\{f^1, \ldots, f^n\}$ fundamentální systém řešení není. Pro nalezení f. s. ř. nám tedy podle tvrzeí sedm stačí jen spočítat W v nějakém šikovném bodě.

VĚTA 8 (variace konstant):

$\{y^1, \ldots, y^n\}$ buď f. s. ř. pro soustavu $Ay = y'$,

$$Y := (\,(\,y^1\,) \quad (\,y^2\,) \quad (\,y^3\,)\,) = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \cdots & y_1^n \\ & & \vdots & \\ y_n^1 & y_n^2 & \cdots & y_n^n \end{pmatrix}$$

a $x_0 \in I$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Pak platí, že

$$y(x) = Y(x) \left(Y^{-1}(x_0) y^0 + \int_{x_0}^{x} Y(t) b(t)\, dt \right)$$

je řešením soustavy $y' = Ay + b$ splňující $y(x_0) = y^0$.