Počítání dvěma způsoby

Princip sudosti

$$\forall G = (V, E) : \sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

DŮKAZ:

Dvojím způsobem spočítáme počet dvojic (v, e), kde $v \in V$, $e \in E$, $v \in e$. — jednou podle vrcholů a pak podle hran.

$$\sum_{v \in V} \deg v = \underbrace{\sum_{e \in E} 2}_{2|E|}$$

Q.E.D.

Nezávislý systém množin

Definice:

Mějme množinu X, $M \subseteq P(x)$ nazýváme **nezávislý systém množin**, pokud

$$\forall A, B \in M : \ A \neq B \Rightarrow A \not\subset B$$

VĚTA (Spernerova):

X buď množina velikosti n. Potom maximální velikost nezávislého systému množin $\mathbb{M} \subseteq P(x)$ je rovna $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (např. v Pascalově $\triangle$ je to v řádku, jehož součet je 2^n, největší číslo).

Příklady:

(i) $n = 3$:

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, 3\} \\ M_1 &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\} \\ M_2 &= \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \end{aligned}$$

jsou nezávislé systémy množin velikosti

$$\binom{3}{1} = 3$$

(ii) obecné n:
$M :=$ množina $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$-prvkových podmnožin množiny $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Pak M bude nezávislý systém velikosti $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

DŮKAZ:

(1) Maximální velikost $\geq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$: z předchozího příkladu.

(2) Maximální velikost $\leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$:
X, M podle předpokladů.
Maximální řetězec: $R = \{0, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \underbrace{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}}_{X}\}$ kde $x_1, \ldots,$ x_n je libovolná permutace prvků X. Maximálních řetězců je $n!$, navíc kdykoliv si

vezmeme libovolné dvě množiny z maximálního řetězce, jedna bude vždy podmnožinou druhé.

Spočítáme dvěma způsoby počet dvojic $(R, \mathcal{M})$ takových, že $A \in R$. R buď maximální řetězec, $\mathcal{M}$ pak množina z M.

Tento počet je:

(a) $\leq$ (#maximálních řetězců) $= n!$
Kdyby do jednoho R patřily dvě $\mathcal{M}$, nepatřily by obě do nezávislého systému množin.

(b) $= \sum_{\mathcal{M}\in M} \underbrace{|\mathcal{M}|!(n-|\mathcal{M}|)!}_{\substack{\#\text{ max. řetězců} \\ \text{obsahujících } \mathcal{M}}}$.

Tedy:

$$n! \geq \sum_{\mathcal{M}\in M} |\mathcal{M}|!(n-|\mathcal{M}|)!$$

$$1 \geq \sum_{\mathcal{M}\in M} \frac{|\mathcal{M}|!(n-|\mathcal{M}|)!}{n!} = \sum_{\mathcal{M}\in M} \frac{1}{\binom{n}{|\mathcal{M}|}} \geq \sum_{\mathcal{M}\in M} \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = |M| \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$$

$$|M| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Q.E.D.

Grafy bez $K_{2,2}$ (C_4)

VĚTA (o počtu hran na n vrcholech):

Nechť $G = (V, E)$ je graf na n vrcholech neobsahující $K_{2,2}$. Potom

$$|E| \leq \frac{n\sqrt{n} + n}{2}$$

DŮKAZ:

Využijeme **Cauchy-Schwarzovu nerovnost**:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

pro libovolné $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Počítáme dvěma způsoby počet podgrafů (cest) `u - v - u'`. Tento počet je:

(a) $\leq \binom{n}{2}$: pro $\forall u, u' \in V$, $u \neq u'$ existuje nejvýše jeden $v \in V$ takový, že $\{u, v\}, \{u', v\} \in E$ — jinak dostaneme $K_{2,2}$:

```
*-* u
 X
*-* u'
```

(b) $= \sum_{v\in V} \binom{\deg v}{2}$: pro $\forall v \in V$ máme právě $\binom{\deg v}{2}$ vidliček `* - v - *`.

Tedy:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in V}\binom{\deg v}{2} &\le \binom{n}{2} &&\le \frac{1}{2}n^2\\
\frac{1}{2}\sum_{n\in V}((\deg v)-1)^2 &\le \sum_{v\in V}\binom{\deg v}{2} &&\le \frac{1}{2}n^2\\
\underbrace{\sum_{v\in V}((\deg v)-1)\cdot 1}_{2|E|-n} &\le \underbrace{\sqrt{\sum_{v\in V}((\deg v)-1)^2}}_{\le\sqrt{n^2}}\cdot\underbrace{\sqrt{\sum_{v\in V}1^2}}_{\sqrt{n}} &&\le n\sqrt{n}
\end{aligned}
$$

$$|E|\le\frac{1}{2}(n\sqrt{n}+n)$$

Q.E.D.