Barvení map a grafů

Politická mapa (obrázek).
Tři barvy obecně nestačí.

Předpoklady

(1) Každý stát je souvislý.

(2) Státy sousedící pouze v jednotlivých bodech nebudeme považovat za sousední.

Problém čtyř barev

Stačí čtyři barvy na obarvení libovolné politické mapy?
Ano, ale důkaz je extrémně těžký.

Definice:

$G = (V, E)$ lze **(řádně) obarvit** k barvami, pokud existuje zobrazení $b\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že $\{x, y\} \in E \Rightarrow b(x) \neq b(y)$.

Definice:

Barevnost grafu $G = \chi(G) = \min\{k :$ G lze obarvit k barvami $\}$.

Příklady:

(i) $\chi(C_{2k}) = 2$

(ii) $\chi(C_{2k+1}) = 3$

(iii) $\chi(K_n) = n$

(iv) $\chi(K_{m,n}) = 2$ $(m, n \geq 1)$

(v) $\chi(T) = 2$ (T strom na ≥ 2 vrcholech)

Vztah mezi barvením map a rovinných grafů

(náznak)
V každém státě vybereme za vrchol hlavní město, pospojujeme hranami hlavní města sousedních států, jistě to lze udělat tak, že graf, který dostaneme, je rovinný.
Řekneme, že mapa je k-obarvitelná $\Leftrightarrow$ rovinný graf je k-obarvitelný.

Problém čtyř barev II.

Jiná formulace:
$\chi(G) \leq 4$ pro každý rovinný graf G?

VĚTA (o pěti barvách):

$\chi(G) \leq 5$ pro každý rovinný graf $G = (V, E)$.

DŮKAZ:

Indukcí podle $|V|$:

(1) $|V| \leq 5$: zřejmé.

(2) $|G|$ rovinný, $|V| \geq 6$ a předpokládáme, že věta platí pro rovinné grafy s menším počtem vrcholů.
G má vrchol x, $\deg x \leq 5$ (Eulerův vztah).

(a) $\deg x \leq 4$: Obarvíme $G - x$ pěti barvami podle indukčního předpokladu, poté dobarvíme x barvou, která se nevyskytuje na jeho sousedech.

(b) $\deg x = 5$: Nechť sousedé jsou označeni $u_1, \ldots, u_5$. G je rovinný, tudíž neobsahuje podgraf K_5 — to ale znamená, že nemůžou být všichni sousedé vzájemně pospojováni hranami. Bez újmy na obecnosti nechť např. $\{u_4, u_5\} \notin E$.

```
* u2    * u5
  \   /
  x * -- * u3
  /   \
* u4    * u1
```

V grafu $G - x$ ztotožníme u_4 a u_5 (tím nám nevznikne žádné křížení):

```
* u2  |__
     //
  u *    * u3
  //
~~|     * u1
```

Podle indukčního předpokladu existuje obarvení b_0 pěti barvami. Obarvení $G - x$ pak můžeme definovat jako:

$$b(v) := b_0(v) \qquad v \neq u_4, u_5$$

$$b(u_4) = b(u_5) := b_0(u)$$

Dobavíme vrchol x barvou různou od $b(u_1)$, $b(u_2)$, $b(u_3)$, $b(u_4) = b(u_5)$.

Q.E.D.

Pozor: Důkaz neprobíhá tak, že vezmu rovinný graf a přidám vrchol. Naopak vezmu libovolný graf, o kterém pouze vím, že libovolný menší graf je rovinný.

Alternativní důkaz:

Indukcí podle $|V|$:

(1) $|V| \leq 5$: zřejmé.

(2) $|V| \geq 6$: Nechť v je vrchol nejmenšího stupně. Dle Eulerova formule $\Rightarrow \deg v \leq 5$. $G - v$ lze obarvit pěti barvami (dle ind. předpokladu).

```
* a     * c
  \   /
  v * -- * b
  /   \
* e    * d
```

Vrchol v vyhodíme:

```
* a     * c

         * b

* e    * d
```

Bez újmy na obecnosti: a, b, c, d, e mají různou barvu.

$$\begin{aligned} f(a) &= \text{ modrá} \\ f(b) &= \text{ červená} \\ f(c) &= \text{ žlutá} \\ f(d) &= \text{ zelená} \end{aligned}$$

Neexistuje žluto–zelená cesta z c do d nebo neexistuje modro–červená cesta z a do b.

Pokud by existovaly, musely by se křížit — buď mimo vrchol (to nesmějí) nebo ve vrcholu (ale jak ho pak obarvit?).

Bez újmy na obecnosti nechť neexistuje cesta $c \sim d$.

Přebarvíme barvy v žluto–zelené komponentě obsahující d (prohodíme žlutou a zelenou). I toto obarvení je korektní, neboť komponenta je maximální a její sousedé mají všichni jiné barvy.

Teď má ale c a d stejnou barvu, takže v můžeme obarvit barvou nevyskytující se na sousedech.

⟨písnička⟩
Q.E.D.