Vánoční besídka (šatnářka)

n dárců dostane nazpět n dárků. Každá z $n!$ možností je stejně pravděpodobná. Jaká je pravděpodobnost, že nikdo nedostane zpátky svůj dárek?

Matematická formulace

Hledáme $\frac{\check{s}(n)}{n!}$, $\check{s}(n) =$ počet permutací π množiny $\{1, \ldots, n\}$ bez pevného bodu.
Pevný bod: i je pevný bod, pokud $\pi(i) = i$.

VĚTA (Šatnářka):

$$\check{s}(n) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Příklad:

$$\check{s}(1) = 1! \left(1 - \frac{1}{1!}\right) = 0$$

$$\check{s}(2) = 2! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) = 1$$

$$\check{s}(3) = 3! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = 2$$

DŮKAZ:

$$S_n = \text{ množina všech permutací } \{1, \ldots, n\}$$

$$A_i = \{\pi \in S_n, i = 1, \ldots, n : \ \pi(i) = i\}$$

$$|A_i| = (n-1)! \ \textit{(Prvek i stojí, ostatní se propermutují.)}$$

Pro $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ platí:

$$\underbrace{\bigcap_{i \in I} A_i}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}} = \text{ množina vsech permutací } \pi$$

množiny $\{1, \ldots, n\}$ takových, že $\pi(i_1) = i_1, \ldots, \pi(i_k) = i_k$.

$$|\bigcap_{i \in I} A_i| = (n-k)! \ \textit{(t prvků stojí, ostatní se propermutují.)}$$

$$\check{s}(n) = |S_n| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| =$$

$$= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{I \in \binom{\{1, \ldots, n\}}{k}} \underbrace{|\bigcap_{i \in I} A_i|}_{(n-k)!}$$

$$= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \underbrace{\binom{n}{k} (n-k)!}_{\frac{n!}{k!}}$$

$$= n! \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\right)$$

Q.E.D.

Tedy **pravděpodobnost**, že nikdo nedostane zpět svůj dárek, je:

$$\frac{\text{š}(n)}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots \pm \frac{1}{n!} \to \frac{1}{e} \approx 0.36787\ldots$$