Kreslení grafu jedním tahem

Sled: $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n;\ e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$
Tah: Sled, $e_i \neq e_j$ (pro $i \neq j$)
Uzavřený tah: Tah, $v_0 \leq v_m$
"Cesta": Tah, $v_i \neq v_j$

Eulerovský graf

$G = (V, E)$ je **Eulerovský** (lze nakreslit jedním uzavřeným tahem), pokud existuje uzavřený tah $v_0, e_1, \ldots, e_m, v_m$ takový, že:

$$\forall e \in E\ \exists!\, i:\ e = e_i\ \wedge\ \forall v \in V\ \exists\, i:\ v = v_i$$

VĚTA ():

G je eulerovský graf, právě když je G souvislý a všechny stupně jsou sudé.

DŮKAZ:

"⇒"

Uzavřený eulerovský tah dává **souvislost** (mezi každými 2 vrcholy existuje tah, tedy i sled) i **sudé stupně** ($\deg v = 2|\{i \in \{1, \ldots, m\}:\ v = v_i\}|$).

"⇐"

Pozorování: Pokud jsou všechny stupně sudé, každou hranou vede uzavřený tah.
Důkaz: Nejdelší tah danou hranou je nutně uzavřený. *Q.E.D.*
$G = (V, E)$ souvislý, všechny stupně sudé. Ukážeme (sporem), že nejdelší uzavřený tah T v G je eulerovský.
Co by bylo, kdyby nebyl: Ze souvislosti víme, že existuje $v \in V(T),\ e \in E \setminus E(T),\ v \in e$. V grafu $G' = (V, E \setminus E(T))$ jsou všechny stupně sudé, tedy v G' existuje uzavřený tah T', obsahující e.
Ve vrcholu v propojíme T, T' do jednoho tahu. Schematicky: **T-O-D-O:** Fig. D0
⇒ nový delší tah, ale T měl být nejdelší!
↯ *Spor*