Věta o sudosti (princip sudosti)

$$\forall G = (V, E) : \sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

DŮKAZ:

Vlevo každá hrana přispěje $2\times$.
Q.E.D.

Důsledek:

$\forall G$: počet vrcholu každého stupně je sudý.

Poznámka:

Neplatí pro nekonečné grafy (`o-o-o-o-`$\cdots$).

```
   o
  /  \
o ----- o ----- o ----- o
```

Skóre grafu

$G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E)$, **skóre grafu G** $= D(G) = (\deg_G(v_1), \ldots, \deg_G(v_n))$

Dvě skóre považujeme za stejná, pokud se liší pouze pořadím prvků.

Příklad:

```
   o
  /  \
o ----- o ----- o ----- o
```

má skóre $(1, 2, 2, 2, 3)$.

```
   o
  /  \
o - o - o - o
```

k němu není izomorfní.

Věta o skóre:

$$D = (d_1, \ldots, d_n,\ 0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n)$$

D je skóre nějakého grafu, právě když

$$D' = (d_1, \ldots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, \ldots, d_{n-2} - 1, d_{n-1} - 1)$$

je skóre nějakého grafu.

Příklady použití:

Je $(1, 2, 3, 3, 3, 4, 4)$ skóre nějakého grafu?
$(1, 2, 2, 2, 2, 3)$ skóre nějakého grafu?

$$(1,2,1,1,1)$$

$$(1,1,1,1,2)$$

$$(1,1,0,0) \Leftrightarrow (0,0,1,1)$$

$$(0,0,0)$$

je skóre grafu.

Je $(1,1,1,2)$?

$$(1,0,0)$$

$$(0,0,1)$$

$$(0,-1)$$

není.

Je $(0,1,2,3,4,4)$?

$$(0,0,1,2,3)$$

$$(0,-1,0,1)$$

DŮKAZ:

"$\Leftarrow$"

G' má skóre D'. Přidáme ke G' nový vrchol v_n a spojíme ho hranou s vrcholy v_{n-1}, v_{n-2}, …, v_{n-d_n}. Dostáváme tak graf se skóre D.

"$\Rightarrow$"

Předpokládáme, že $G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E)$ má skóre D. Označme $d = d_n = \deg v_n$.

První případ: Z v_n vedou hrany do vrcholů $v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_{n-d}$. Odstraněním v_n pak z těchto hran dostaneme graf se skóre D'.

Druhý případ: Neplatí první případ, tedy potom je vrchol v_n propojen s jinými vrcholy, než je posledních d_n, neboli:

$$i < n - d \leq j : \ \{v_i, v_n\} \in E, \ \{v_j, v_n\} \notin E$$

Ale protože $\deg v_i \ (= d_i) \leq \deg v_j \ (= d_j)$, existuje v_k $(k \neq i, j)$ takový, že $\{v_j, v_k\} \in E$, $\{v_i, v_k\} \notin E$ (tedy existuje zase nějaký vrchol v_k takový, který je spojený s v_j, ale ne v_k a tím se stupeň kompenzuje).

Přidáme do E hrany $\{v_i, v_k\}, \{v_j, v_n\}$, odebereme z E hrany $\{v_i, v_n\}, \{v_j, v_k\}$. Skóre tak zůstává D, ale zmizela neposedná hrana mimo posledních d_n prvků (vrcholy v_i, v_j jsme místo přes v_n spojili přes v_k). Převedli jsme tedy situaci na první případ.

Q.E.D.