Permutace a faktoriál

Permutace konečné množiny X: Libovolná bijekce $\pi\colon X \xleftrightarrow{1\text{–}1} X$.

Příklad:

Mějme množinu $X = \{a, b, c, d\}$, definujme permutaci $\pi(a) = b$, $\pi(b) = d$, $\pi(c) = c$, $\pi(d) = a$. Matice permutace pak je

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix},$$

permutace tvoří uspořádání

$$(b, d, c, a)$$

a dá se vyjádřit na grafu jako

```
a * ---> * b
      _    |
     |\    |
        \ v
c *<-\    * d
   \-/
```

n **faktoriál:** $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, $0! = 1$

Tvrzení:

Počet permutací n-prvkové množiny je $n!$.

DŮKAZ:

n možností, kam se zobrazí první prvek.
$n - 1$ možností, kam se zobrazí druhý prvek.
$\ldots$

VĚTA ():

$|X| = n$, $|Y| = k$. Pak existuje:

- k^n zobrazení $X \to Y$.
- $k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)$ prostých zobrazení $X \to Y$.
- $k! = n!$ bijekcí $X \xleftrightarrow{1\text{–}1} Y$, pokud $k = n$.
- 0 bijekcí $X \xleftrightarrow{1\text{–}1} Y$, pokud $k \neq n$.

Kombinační čísla

Definice:

Kombinační číslo (neboli **binomický koeficient**):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 1} \qquad n, k \in \mathbb{N}_0,\ n \geq k$$

Alternativní definice:

$\binom{n}{k}$ je počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny.

Tvrzení:

Obě definice jsou ekvivalentní.

DŮKAZ:

Nechť $|X| = n$. Pak počet uspořádaných k-tic různých prvků z X je kombinatorickou úvahou

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Zároveň však tento počet můžeme spočítat přes kombinační čísla jako (počet k-prvkových podmnožin X)(počet možných uspořádání) $= \binom{|X|}{k} k! = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Q.E.D.

Značení:

Buď X množina. Pak $\binom{X}{k}$ je množina všech k-prvkových podmnožin množiny X. Navíc

$$\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}.$$

Platí:

(i) Symetrie:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad n \geq k \geq 0$$

DŮKAZ:

Z definice kombinačního čísla (algebraicky nebo doplňky).

(ii) Sousední čísla:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

DŮKAZ:

Z množinové definice kombinačního čísla:

$$\left|\binom{X}{k}\right| = \underbrace{\left|\binom{X \setminus \{x_n\}}{k-1}\right|}_{\substack{\text{počet } k\text{-prvkových podm.} \\ \text{množiny } X \text{ obs. } x_n}} + \underbrace{\left|\binom{X \setminus \{x_n\}}{k}\right|}_{\substack{\text{počet } k\text{-prvkových podm.} \\ \text{množiny } X \text{ neobs. } x_n}}$$

Q.E.D.

Pascalův trojúhelník

Ve vrcholu $\triangle$ je 1, okraje jsou lemovány nulami, každý prvek je součtem dvou prvků nad ním.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Pohled přes kombinační čísla:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

neboť $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Binomická věta

Víme:

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad n \in \mathbb{N}_0,\ x, y \in \mathbb{R}$$

DŮKAZ:

Indukcí podle n:

(1) $n = 0$, $n = 1$

$$(x+y)^0 = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$$

$$(x+y)^1 = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0$$

(2) $n \Rightarrow n+1$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y) = (x+y)\left(\binom{n}{0}x^0y^n + \cdots + \binom{n}{n}x^ny^0\right) = \\
= \binom{n}{0}x^1y^n + \cdots + \binom{n}{n}x^{n+1}y^0 + \binom{n}{0}x^0y^{n+1} + \cdots + \binom{n}{n}x^ny^1 = \\
= \binom{n+1}{0}x^0y^{n+1} + \binom{n+1}{1}x^1y^n + \cdots + \binom{n+1}{n}x^ny^1 + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0 = \\
= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k}
\end{aligned}
$$

Důsledek:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$