Minimální kostra grafu

Kostra grafu

Kostra souvislého grafu $G = (V, E)$ je libovolný strom $T = (V, E')$, kde $E' \leq E$.

Poznámka:

Každý souvislý graf má kostru: dokud v G existuje kružnice, odebíráme z G hranu kružnice, dostaneme tak nakonec kostru grafu.

Příklad:

Prasátko. (Na onom grafu se vysvětluje i minimální kostra.)

Graf s ohodnocenými hranami: $G = (V, E), w\colon E \to \mathbb{R}^+$.

Problém minimální kostry:

Pro daný souvislý graf $G = (V, E), w\colon E \to \mathbb{R}^+$ máme nalézt **minimální kostru**, tj. kostru $K = (V, E')$ takovou, že její váha $w(K) = w(E') = \sum_{e \in E'} w(e)$ je minimální.

Kruskulův (hladový) algoritmus

Mějme souvislý $G = (V, E), w\colon E \to \mathbb{R}^+$. Předpokládejme, že $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, přičemž

$$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$$

1. $E_0 = \emptyset$
2. Pro $i = 1, 2, \ldots, m$ pokládáme

$$E_i = \begin{cases} E_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{pokud } (V, E_{i-1} \cup \{e_i\}) \text{ nemá kružnici} \\ E_{i-1} & \text{jinak} \end{cases}$$

3. $(V, E_m) \to$ výstup (minimální kostra)

VĚTA (kostra nalezená algoritmem je minimální):

DŮKAZ:

(V, K) nechť je výsledná kostra. Budiž (V, L) libovolná jiná kostra, pak chceme $w(L) \geq w(K)$. Indukcí podle $\underbrace{d = |K \Delta L| = |(K \setminus L) \cup (L \setminus K)|}_{\text{mohutnost \textbf{symetrické diference}}}$:

$(d = 0)$ $K = L$, platí

$(d > 0)$ Předpokládáme, že tvrzení platí pro všechny menší hodnoty d.

$$d > 0 \Longrightarrow K \neq L,\ |K| = |L| \Longrightarrow \exists\, e \in L \setminus K$$

$(V, L \setminus \{e\})$ pak má dvě komponenty (graf s hranou byl strom). Obrázek.

(V, K) kostra $\Longrightarrow (V, K \cup \{e\})$ má (jedinou) kružnici C obsahující e. Existuje $e' \neq e \in C$:

$$|e' \cap V_1| = 1$$
$$|e' \cup V_2| = 1$$

Tvrdíme:

$$w(e') \leq w(e)$$

(jinak $w(e) < w(e')$, algoritmus tedy uvažoval e dříve než e', ovšem pokud ho nezařadil, mohl ho odmítnout jedině kvůli C (to je jediná kružnice v $K \cup e$), ale $e' \in C$ nebylo ještě uvažováno).

$$L' = (L \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$$

Tvrdíme, že (V, L') je kostra. (Viz náš virtuální obrázek. Měli jsme dvě komponenty spojené hranou e, teď je jen spojíme místo toho jinou hranou e'.)

$$|L'\Delta K| < |L\Delta K|$$

$$w(L) \geq w(L') \overset{\text{ind. předp.}}{\geq} w(K)$$

Q.E.D.

Jarníkův algoritmus na minimální kostru

1. $V_0 := \{v\}$, kde v je libovolný vrchol z V.
2. Pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ($n = |V|$) nechť e_i je hrana minimální váhy vedoucí z V_{i-1} do $V \setminus V_{i-1}$.
Obrázek.
$V_i = V_{i-1} \cup e_i$ (přidáme koncový vrchol hrany e_i).
3. $strom(V, \{e_1, \ldots, e_{n-1}\})$ je výstup (minimální kostra grafu).

Borůvkův algoritmus

Předpokládáme, že libovolné dvě hrany mají různou váhu: $w(e) \neq w(e') \; \forall e \neq e'$.

1. Spojíme každý vrchol hranou s nejbližším sousedem: (obrázek).
2. Spojme každou komponentu hranou s nejbližší jinou komponentou: (obrázek).
Opakujeme, dokud nedostaneme jednu komponentu — to je výstup.