Odhady faktoriálů a kombinačních čísel

Faktoriály

Věta

$$n^{n/2} \le n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

$$n^{n/2} = \left(\sqrt{n}\right)^n$$

DŮKAZ:

$$(n!)^2 = \underbrace{(1 \cdot n)(2 \cdot (n-1)) \cdots (n \cdot 1)}_{\substack{\textit{(n! jednou popředu a} \\ \textit{k tomu podruhé odzadu)}}}$$

$$(n!)^2 = z_1 \cdot z_2 \cdots z_{2n}$$

Z AG nerovnosti:

$$z \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

A protože

$$(i+1)(n-i) = n + i(n-1-i) \ge n$$

(pro $i = 0, 1, \cdots, n-1 \Rightarrow (i \ge 0 \wedge (n-1-i) \ge 0)$), platí:

$$z \ge n$$

Tedy:

$$(n^n) \le (n!)^2 \le \left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right)^n$$

$$n^{n/2} \le n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Q.E.D.

Přesněji

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

$$\text{tj. } \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = 1$$

Bez důkazu.

Kombinační čísla

Můžeme přeformulovat jako odhad prostředního čísla v n-tém řádku Pascalova trojúhelníku.

Víme

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Protože součet je počet podmnožin n-prvkové množiny.
Alternativní výklad: Každá čísla v předcházejícím řádku přispějí $2\times$ do dalšího řádku.

Zřejmě z první definice kombinačního čísla:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \cdots > \binom{n}{n}$$

$$\frac{2^n}{n+1} < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} < 2^n$$

Přesněji:

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \approx \frac{2^n}{\sqrt{\pi n/2}}$$

Platí také:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} \leq \left(\frac{e \cdot n}{k}\right)^k$$

Bez důkazu. (Ve skriptech, nepovinný.)