Orientované grafy

Orientovaný graf: $\vec{G} = (V, \vec{E})$, kde V je libovolná konečná množina a $\vec{E} \equiv V \times V$.

Definice:

$\deg^+ v$ = vstupní stupeň v = počet hran vedoucích do v.
$\deg^- v$ = výstupní stupeň v = počet hran vedoucích z v.

Příklad:

$$\vec{G} = (\{a,b,c\}, \{(a,b),(b,b),(a,c),(c,a)\})$$

```
         <\
      _ *-/
      /| b
    /
a /
* -----> * c
  <-----
```

$$\begin{array}{ll} \deg^+ a = 1 & \deg^+ b = 2 \\ \deg^- a = 2 & \deg^- b = 1 \end{array}$$

Definice:

$\vec{G}$ je **slabě souvislý**, pokud $\forall x, y \in V$ existuje (neorientovaná) cesta z x do y.

$$x\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet y$$

$\vec{G}$ je **slabě souvislý**, pokud $\forall x, y \in V$ existuje orientovaná cesta z x do y.

$$x\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet y$$

Definice:

Orientovaný graf $\vec{G}$ je **eulerovský**, pokud lze nakreslit jedním uzavřeným orientovaným tahem.

$$\cdots \to \bullet \to \bullet \to \cdots$$

VĚTA (podmínka eulerovského grafu):

$\vec{G} = (V, \vec{E})$ je eulerovský $\iff$ $\vec{G}$ je slabě souvislý a $\underbrace{\forall v \in V : \deg^+ v = \deg^- v}_{(*)}$.

DŮKAZ:

"$\Rightarrow$"

Zřejmé.

"$\Leftarrow$"

LEMMA:

Každou hranou grafu splňujícího $(*)$ vede uzavřený orientovaný tah.

DŮKAZ:

Nejdelší orientovaný tah danou hranou je uzavřený. Když ho totiž vedeme, postupně umazáváme hrany a nakonec nám podle rovnosti v (∗) zbyde jen poslední hrana, která vede do v.

Q.E.D.

Nejdelší uzavřený orientovaný tah v $\vec{G}$ je eulerovský. Jinak (obdobně jako v neorientovaném případě, schematicky):

```
 /<-\
|    * nejdelší uzavřený orientovaný tah
 \->/
```

Po použití lemmatu a odstranění hran tahu bychom však našli ještě další jiný uzavřený orientovaný tah, díky souvislosti má alespoň jeden společný vrchol. Pak ale můžeme oba tahy propojit do jednoho delšího uzavřeného tahu.

$\sharp$ *Spor*