Princip inkluze a exkluze (PIE)

Příklad:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

VĚTA (PIE):

Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(-1)^{k+1}}_{\text{(parita)}} \cdot \sum_{I \in \binom{\{1,\ldots,n\}}{k}} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

(Ve vnořené sumě sčítáme přes všechny k-prvkové podmnožiny množiny $1..n$.)

DŮKAZ:

Nechť x je libovolný prvek z $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Pro $n = 1$, $n = 2$ viz diagramy množin, nakreslit si, kam který prvek přispívá: $+1 - 1 + 1 \cdots$

Kolikrát je počítán x vlevo, kolikrát vpravo? Vlevo jednou — triviální.

Vpravo

Nechť j označuje počet množin A_i, do kterých patří x.

Příklad:

$$x \in A_1, \ldots, A_j$$
$$x \notin A_{j+1}, \ldots, A_n$$

Pak platí:

$$\#x = \binom{j}{1} - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - \cdots + (-1)^{j-1}\binom{j}{j}$$
$$= \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i-1}\binom{j}{i} + 1 - 1$$

Obracíme znaménko a paritu:

$$= 1 - \sum_{i=0}^{j} (-1)^{i}\binom{j}{i}$$
$$= 1 - (-1+1)^j$$
$$= 1$$

Q.E.D.

Příklad:

$$|X| = \{1, \ldots, n\},\ |Y| = \{1, \ldots, l\},\ n \geq l$$

Kolik existuje zobrazení z X **na** Y?

Všech zobrazení z X do Y je l^n. Nechceme počítat ta, ve kterých se na nějaký prvek Y nezobrazuje žádný prvek z X:

$$\exists y \in Y : \ \forall x \in X,\ f(x) \neq y.$$

Pro všechna $i = 1, \dots, l$ platí:

$$A_i = \{j\colon X \to Y \mid \forall x \in X,\ f(x) \neq i\} = \{j\colon X \to Y - \{i\}\}$$
$$|A_i| = (l-1)^n$$

Pro $i_1 \neq i_2$:

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} = \{f\colon X \to Y - \{i_1, i_2\}\}$$
$$|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = (l-2)^n$$

Pro $\{i_1, \dots, i_k\} \in \binom{\{1, \dots, l\}}{k}$:

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} = \{f\colon X \to Y - \{i_1, \dots, i_k\}\}$$
$$\{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\} = (l-k)^n$$

Počet zobrazení z X na Y je:

$$l^n - |\bigcup_{i=1}^{l} A_i| =$$

$$= l^n - \left(\binom{l}{1}(l-1)^n - \binom{l}{2}(l-2)^n + \binom{l}{3}(l-3)^n - \dots + \right.$$

$$\left. +(-1)^{l-2}\binom{l}{l-1}(l-(l-1)^n) + (-1)^{l-1}\binom{l}{l}(l-l)^n\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \binom{l}{k} (l-k)^n$$