Rovinné grafy

Oblouk: Množina bodů $\{\gamma(x) : x \in [0,1]\}$, přičemž $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ (rovina) je prosté a spojité zobrazení.

Definice:

Graf $G = (V, E)$ je **rovinný**, má-li **rovinné nakreslení**:
Vrcholy odpovídají různým bodům v $\mathbb{R}^2$, hrany odpovídají obloukům spojujícím příslušné dvojice vrcholů tak, že mají-li dva oblouky společný bod, potom je tento bod pro oba oblouky koncový.

Příklady:

(i) K_4 je rovinný
(ii) C_n je rovinná
(iii) Libovolný strom

Je známo: Každý rovinný graf má rovinné nakreslení, v němž hrany odpovídají úsečkám. (Důkaz těžký.)

Definice:

Stěny rovinného nakreslení: Maximální souvislé oblasti množiny $\mathbb{R}^2 \setminus X$, kde X je množina bodů ležících na obloucích nakreslení. (Souvislost bereme intuitivně.)

Příklad:

Vezmeme-li K_4, pak stěny jsou vlastně všechny oblasti mezi úsečkami i kolem celého grafu (má tedy 4 stěny).

Vnější stěna: Jedna neomezená stěna, která existuje pro každý rovinný graf.
Vnitřní stěny: Ostatní stěny.

Definice:

Topologická kružnice: Uzavřený "oblouk" (tj. $\gamma(0) = \gamma(1)$).

Příklad:

Obrázky. (Šneci a měňavky. ;-)

VĚTA (Jordanova věta o kružnici):

Libovolná topologická kružnice rozděluje rovinu na dvě souvislé oblasti (**vnitřek** a **vnějšek** dané kružnice).
(Důkaz těžký.)

VĚTA (Nerovinnost K_5):

Graf K_5 není rovinný.

DŮKAZ:

Sporem. Nechť $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Obrázek: vezměme si vrcholy 1, 2, 3 a hrany mezi nimi. Ty vytvoří topologickou kružnici K.

(a) v_4 leží uvnitř K:
Pak ho umístíme do středu, ale pak kam s vrcholem V_5? Žádná stěna nemá na hranici všechny vrcholy 1, 2, 3, 4.

(b) v_4 leží vně K:
Můžeme převést na isomorfní graf s v_4 uvnitř.

Q.E.D.

VĚTA (Nerovinnost $K_{3,3}$):

Graf $K_{3,3}$ (úplný bipartitní graf o $3+3$ vrcholech) není rovinný.

DŮKAZ:

$V = \{1, 2, 3, 1', 2', 3'\}$
Spousta obrázků.

```
          o 1
         / \
        / 3   \
2'  o - -o- - o 1'
        \     /
         \ /
          o 2
```

Kam s $3'$?
Q.E.D.

Pozorování:

G rovinný $\Leftrightarrow$ každé dělení G je rovinné.

DŮKAZ:

Obrázkem K_4. Libovolně rozdělíme hrany, ale tím se nám nijak nezmění rovinnost.

VĚTA (Kuratowski):

G je rovinný $\Leftrightarrow$ G neobsahuje dělení K_5 ani dělení $K_{3,3}$.

DŮKAZ:

"$\Rightarrow$"
Zřejmá.

"$\Leftarrow$"
Těžká.

Q.E.D.

Eulerův vztah

G souvislý rovinný graf, $|V| \geq 1$, $s =$ počet stěn nějakého rovinného nakreslení G. Potom

$$|V| - |E| + s = 2$$

(Tudíž počet stěn nezávisí na volbě nakreslení.)

DŮKAZ:

Indukcí podle $|E|$:

(1) $|E| = 0$: $s = 1$, $|V| = 1$ (kvůli souvislosti), $1 - 0 + 1 = 2$.

(2) $|E| \geq 1$:

(a) G neobsahuje kružnici: G je strom.
Tedy $|V| = |E| + 1$, $s = 1$, tedy platí.

(b) G obsahuje kružnici C:
e buď libovolná hrana na C. $G - e$ splňuje Eulerův vztah (indukční předpoklad), má o hranu a stěnu méně, tedy G splňuje Eulerův vztah.

Q.E.D.

Tvrzení:

G buď rovinný, 2-souvislý. Pak hranice libovolné stěny v libovolném nakreslení G odpovídá kružnici v G.

Příklad:

```
      o---o-.
     / \     o
    /.o.\  / |
   o-----o---o

   Ale ne:


      o-----o------o--\
      |\    |      | o \
      | o-o |      | |  \
      |     |      | o   \
      o-----o      o------o
```

DŮKAZ:

Stačí ukázat, že tvrzení:

(i) platí pro trojúhelník

(ii) nepřestane platit podrozdělením nebo přidáním hrany

Jednoduše z obrázku.

Tvrzení:

$G = (V, E)$ rovinný graf, $|V| \geq 3$. Potom:

(i) $|E| \leq 3|V| - 6$

(ii) G neobsahuje $\Delta \Rightarrow |E| \leq 2|V| - 4$

DŮKAZ:

(i) Přidáváme hrany, dokud nedostaneme nějaký maximální rovinný graf, pro který platí, že po přidání jakékoliv hrany do něj již získáme graf, který není rovinný. Takový graf určitě bude 2-souvislý.

Souvislý bude, poněvadž kdyby měl více komponent, určitě bychom mohli přidat nějakou hranu, kterou komponenty spojíme, a tím by nebyla narušena rovinnost.

2-souvislý bude, jinak můžeme přidat hranu, která podruhé spojí nějaké dvě komponenty.

Každá stěna odpovídá kružnici, dokonce trojúhelníku: (obrázek) — každou kružnici můžeme rozkouskovat na trojúhelníky tak, že stále budeme mít rovinné zobrazení.

Počet incidentních dvojic hrana—stěna $= 3s = 2|E|$:

$$3s = 2|E|$$

$$3|E| = 3|V| + 3s - 6 \qquad \textit{(Eulerův vzorec)}$$
$$|E| = 3|V| - 6$$

To platí pro každý maximální rovinný graf (rovinná triangulace).

(ii)

(a) Výsledný graf není 2-souvislý: pak to musí být hvězda.
Pokud můžeme přidat hranu, byl nesouvislý a spojili jsme dvě komponenty, tím trojúhelník určitě nevytvoříme. Pokud byl souvislý (ale ne 2-souvislý), každá hrana již nutně vytváří trojúhelník.
Hvězda:

$$|E| = |V| - 1 \leq 2|V| - 4$$

(b) Výsledný graf je 2-souvislý.
Každá stěna je ohraničena kružnicí délky ≥ 4 Počet incidenčních dvojic hrana—stěna $= 2|E| \geq 4s$:

$$2s \leq |E|$$
$$2|E| = 2|V| + 2s - 4$$
$$|E| \leq 2|V| - 4$$

Důsledky

(1) K_5 ani $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

$$K_5 : \ z(i) = \ 10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$$
$$K_{3,3} : \ z(i) = \ 9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4$$

(2) Každý rovinný graf má alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 5.
Sporem: Kdyby všechny vrcholy byly stupně alespoň 6 $\Rightarrow$

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg v \geq 6|V|$$

(spor s (i)).