Množiny

Množina: soubor prvků.

Zápis:

- výčtem prvků: $X = \{a, b, c\}$
- vlastností: $X = \{i \in \mathbb{N} : \exists\, j \in \mathbb{N},\ i = j\}$

$$X = Y \Leftrightarrow (x \in X \Leftrightarrow x \in Y) \qquad \forall x$$

Je-li X konečná, $|X| \Leftrightarrow \operatorname{len}(X)$ (velikost, mohutnost).

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y) \qquad \forall x$$

$P(X)$: Potenční množina množiny X — množina všech podmnožin množiny X (včetně $\emptyset$ a X).
Je-li X konečná, $|P(X)| = 2^{|X|}$.
Symbolika: $|X| \cap |Y|$, $|X| \cup |Y|$, $|X| \setminus |Y|$, ...

Relace

Neuspořádaná dvojice: $\{x, y\}$
Uspořádaná dvojice: (x, y): $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \wedge y = y')$; např. $\{\{x\}, \{x, y\}\}$
Kartézský součin: $X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ Y \in Y\}$
Relace R mezi X, Y: $R \subseteq X \times Y$
Relace R na X: $R \subseteq X \times X$
Značení: $(x, y) \in \mathbb{R}$: xRy (jde-li o binární relaci)

Definice:

Relace R na množině X je:

- **reflexivní:** $xRx \qquad \forall x \in X : xRx$
- **symetrická:** $xRy \Rightarrow yRx \qquad \forall x, y \in X$
- **tranzitivní:** $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz \qquad \forall x, y, z \in X$
- **ekvivalence:** reflexivní, symetrická, tranzitivní

Třídy ekvivalence

Určené prvkem x:

$$R[x] = \{y \in X, xRy\}$$

(díky symetrii platí i yRx).

Příklad:

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 4), (4, 2)\}$$
$$R[1] = \{1\}$$
$$R[2] = R[4] = \{2, 4\}$$

Tvrzení:

(i) $x \in R[x] \qquad \forall x \in X$
(ii) $R[x] = R[y] \vee R[x] \cap R[y] = \emptyset \qquad \forall x, y \in X$

DŮKAZ:

(i) Z reflexivity.

(ii) Nechť $x, y \in X$:

(1) Předpokládejme xRy:

$R[x] \subseteq R[y]$: Mějme libovolné $z \in R[x]$, tedy $zRx \overset{\text{tranz.}}{\to} zRy$, to znamená $z \in R[y]$. *Q.E.D.*

$R[y] \subseteq R[x]$ obdobně (symetrie).

$$R[x] = R[y]$$

(2) Předpokládejme, že neplatí xRy:

Pro spor nechť $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$. Mějme libovolné $z \in R[x] \cap R[y]$. Pak jistě $xRz \wedge zRy \overset{\text{tranz.}}{\Rightarrow} xRy$. $\not\sharp$ *Spor*

$$R[x] \cap R[y] = \emptyset$$

Důsledek:

Množina (systém množin) $\{R[x] : x \in X\}$ tvoří tzv. **rozklad** množiny X. $\forall x \in X$ pak patří do právě jedné množiny z rozkladu.

Uspořádání

(Částečné) uspořádání: Relace na X, která je reflexivní, tranzitivní a *antisymetrická* ($xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$).
Značení: $\leq$ či $\preceq$
Příklady: $(\mathbb{N}, \preceq)$, $(\mathbb{N}, |\,)$ *(dělí)*, $(P(X), \preceq)$
Lineární uspořádání: Takové uspořádání, že $xRy \vee yRx \quad \forall x, y \in X$.
Pozn.: $(P(X), \preceq)$ je lineární, pokud $|X| \leq 1$.

Zobrazení

Definice:

Máme-li množiny X, Y, **zobrazení z** X **do** Y definujeme jako libovolnou relaci $f \subseteq X \times Y$, která splňuje předpoklad, že $\forall x \in X\ \exists!\, y \in Y$ takové, že xfy.

Značení: $f\colon X \to Y$, $f\colon x \mapsto y$, $f(x) = y$

Definice:

Máme-li $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$, **složené zobrazení** $g \circ f$ značí zobrazení $X \to Z$, definované předpisem:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \forall x \in X$$

Poznámka:

$g \circ f$ je skutečné zobrazení z X do Z:

$$(g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\exists!\, y}) = \underbrace{g(y)}_{\exists!\, z} = z$$

Definice:

Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$ je:

- **prosté** (injekce $f\colon X \hookrightarrow Y$), pokud $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \quad \forall x, y \in X$.
- **na (z X na Y)** (surjekce $f\colon X \twoheadrightarrow Y$), pokud $\forall y \in Y\ \exists\, x \in X$ takové, že $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (bijekce $f\colon X \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$ či $f\colon X \xleftrightarrow{1-1} Y$), pokud je prosté a *na*.

Pro konečné množiny platí:

- prosté: $|X| \leq |Y|$
- *na*: $|X| \geq |Y|$
- bijekce: $|X| = |Y|$

Pozn.: Pojem **funkce** se používá ve významu "zobrazení" či "zobrazení do $\mathbb{R}$".