

Úvod do kombinatorické teorie her

Lucie Mohelníková

`<Lucka.Mohelnikova@gmail.com>`

Přehled

1 Úvod

2 Základní typy her

3 Teorie okolo piškvorek

4 Piškvorkovité hry

Kombinatorické hry

- většinou konečná hra dvou hráčů s nulovým součtem a úplnou informací
- nefiguruje zde náhoda
- určení hry: možnými stavy (pozicemi) a hráčem, který je na tahu
- hráči se střídají dokud nedosáhnou koncového stavu (vítězství jednoho z hráčů, remíza)
- ohodnocovací funkce (3 různé hodnoty): -1 (1. hráč prohrál), 0 (došlo k remíze), +1 (1. hráč vyhrál)

John Horton Conway (narozen 26.12.1937 v Liverpoolu)

- profesor v Princetonu
- Erdosovo číslo: 1
- knihy: Winning Ways for your Mathematical Plays (společně s E. Berlekampem a R. Guyem), On Numbers and Games
- výhonky (sprouts)
- Game of Life (celulární automat, 1970)
- Conwayovo puzzle (třináct dílků $1 \times 2 \times 4$, jeden $2 \times 2 \times 2$, jeden $1 \times 2 \times 2$, tři $1 \times 1 \times 3$, krabice $5 \times 5 \times 5$)

Přehled

① Úvod

② Základní typy her

③ Teorie okolo piškvorek

④ Piškvorkovité hry

NIM

- hráči si střídavě vybírají jednu z n hromádek, ze které odeberou určitý nenulový počet kamenů
- 2 různé konce hry:
 - 1 hráč, který vezme poslední kámen, prohrál (misere game)
 - 2 hráč, který vezme poslední kámen/y, vyhrál
- původ slova NIM:
 - z němčiny, znamená vzít
 - ambigram: NIM otočení o $180^\circ \Rightarrow$ WIN

Domino a párovací strategie

Popis hry

- 2 hráči pokládají dílky domina na obdélníkovou plochu
- dílky se nepřekrývají
- hráč, který položí poslední kostku domina, vyhrál

Strategie pro začínajícího hráče

- začínající hráč položí svou kostku přesně doprostřed hracího plánu
- poté pokládá kostky symetricky podle druhého hráče

Piškvorky

- hráči střídavě kreslí své symboly (X - Xena, O - Oskar) na čtverečkovaný papír
- vítěz: hráč, který vytvoří nepřerušenu řadu pěti svých symbolů
- 1. století před Kristem (Římské imperium)
- různé názvy:
 - Tick-tack-toe, tic-tac-toe, tick-tat-toe, or tit-tat-toe (USA, Kanada)
 - Noughts and crosses, Naughts and crosses (Velká Británie, Irsko, Austrálie, Nový Zéland, Jižní Afrika)
 - Xs and Os (Egypt, Skotsko, Indie)

Tic-tac-toe, magické čtverce

Tic-tac-toe

- hráči střídavě kreslí své symboly (X - Xena, O - Oskar) na hrací plochu rozdělenou na 3x3 pole
- výhra: 3 symboly v řadě
- 2. hráč může vynutit remízu (důkaz)

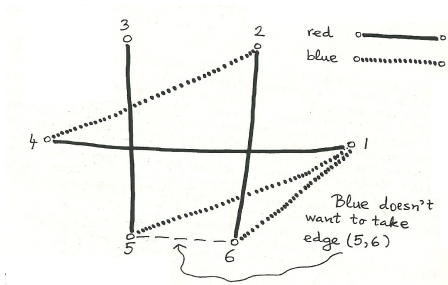
Magické čtverce

- 2 hráči si střídavě vybírají čísla, vítězí ten, jehož 3 čísla mají součet 15

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Sim (G.J.Simmons)

- základ: K_6 s neobarvenými hranami
- 2 hráči posupně obarvují hrany svou barvou (modrá, červená)
- prohrává ten, kdo vytvoří trojúhelník své barvy
- nenastává remíza (Ramseyova věta)



Přehled

① Úvod

② Základní typy her

③ **Teorie okolo piškvorek**

④ Piškvorkovité hry

n^d hryDefinice (n^d hry)

Herní plán V je d -dimenzionální hyperkrychle velikosti $n \times \dots \times n = n^d$, tedy množina d -tic: $V = \{a = (a_1, a_2, \dots, a_n) : 1 \leq a_j \leq n, \forall j : 1 \leq j \leq d\}$

- vyhrávající množina $(a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)})$
- posloupnost $a_j^{(1)}, a_j^{(2)}, \dots, a_j^{(n)}$ je buď rostoucí (1 až n), klesající (n až 1) nebo konstantní ($c = c_j$)
- Xena (1. hráč), Oskar

n^d hry

Věta

(a) Počet vyhrávajících linií je $\frac{(n+2)^d - n^d}{2}$.

(b) Pokud je n liché, pak každým bodem prochází nejvýše $\frac{3^d - 1}{2}$ vyhrávajících linií.

(c) Pokud je n sudé, pak každým bodem prochází nejvýše $2^d - 1$ linií, rovnost nastává pokud $c_j = c$ nebo $n + 1 - c$.

Důkaz (a)

- pro každou souřadnici platí, že je: rostoucí, klesající, konstantní $\Rightarrow n + 2$ možností (pro jednu souřadnici) $\Rightarrow (n + 2)^d$
- nelze, aby všechny 3 souřadnice byly konstantní \Rightarrow odečtení n^d
- každá linie má 2 orientace \Rightarrow děleno 2
- celkem: $\frac{(n+2)^d - n^d}{2}$

Věta

(b) Pokud je n liché, pak každým bodem prochází nejvýše $\frac{3^d-1}{2}$ vyhrávajících linií.

Důkaz (b)

- n je liché, bod $c = (c_1, c_2, \dots, c_d) \in n^d$ pro všechna j
- j -té souřadnice bodů na orientované linii obsahující c jsou:
 - 1 buď rostoucí od 1 do n ,
 - 2 nebo klesající od n do 1,
 - 3 nebo konstantně c_j .
- 2 orientace (pro každou linii)
- všechny souřadnice nemohou být konstantní
- celkem: $\frac{3^d-1}{2}$, rovnost nastává pro středový bod

Silné hry

Věta

Nechť (V, F) je libovolný konečný hypergraf. V je konečná množina, které říkáme herní plocha. F je libovolná kolekce podmnožin V ($F \subset 2^V$, hyperhrany, vyhrávající množiny). 2 hráči (Xena, Oskar) střídavě obsazují body herního plánu V . Vyhrává ten, kdo jako první obsadí vyhrávající množinu $(A \int F)$. Jinak hra končí remízou.

Jak vyhrát silnou hru?

To nikdo neví ...

Stealing strategy

Věta

Existuje vyhrávající strategie pro začínajícího hráče.

Důkaz

- *necht' existuje výherní strategie pro nezačínajícího hráče*
- *1. hráč provede zahozený tah*
- *každý další tah hraje nezačínající hráč podle hypotetické vyhrávající strategie druhého hráče*
- *pokud musí zahrát do místa původně zahozeného tahu, tak zahraje na libovolné neobsazené pole (nový zahozený tah)*
- *strategie nezačínajícího hráče vítězná, musí být vítězná i tato nová strategie*
- *nemůže existovat vítězná strategie jak pro začínajícího, tak pro nezačínajícího hráče (SPOR!)*

Přehled

- 1 Úvod
- 2 Základní typy her
- 3 Teorie okolo piškvorek
- 4 Piškvorkové hry

Rendju

- 20. století před Kristem (nejstarší logická hra)
- KAKUGO (5 kroků)
- hrací pole: 14×14 políček, 15×15 průsečíků
- černý (začínající hráč) nesmí jedním tahem vytvořit (jinak prohrává): dvě trojky, dvě čtyřky nebo přesah (FAULY)
- Česká federace piškvorek a Renju (www.piskvorky.cz)

Gomoku

- spoj pět
- goban, prostorová omezenost
- zakázáno: řada delší než 5 + jiná pravidla
- obecné Gomoku - PSPACE - complete
- L. Victor Allis - na hracím plánu 15×15 existuje vyhrávající strategie pro začínajícího hráče

Šestvorky

- autor neznámý, 1999
- 2003 - I-Chen Wu (umělá inteligence), zkoumání, zda má začínající hráč výhodu
- dvouletý výzkum, výhoda neznatelná, matematický důkaz neexistuje
- pravidla:
 - 2 značky za kolo
 - začínající hráč: 1 značka
 - 6 značek v řadě

Zdroje

- Beck, J.: Lectures on Positional Games
- <http://www.piskvorky.cz/>
- <http://cs.wikipedia.org/>
- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page