

Soukromé gymnázium AD FONTES, o.p.s.

Seminární práce z Matematiky

Fibonacciho čísla

Petr Baudiš
oktáva
18. 12. 2003

Obsah

1. Úvod	3
2. Matematický aparát	4
2.1. Fibonacciho řada	4
2.2. Zlatý řez	4
2.3. Lucasova řada	6
2.4. Obecné Fibonacciho řady	6
3. Vlastnosti	8
3.1. Binetův vzorec	8
3.2. Součet	8
3.3. Test členství v řadě	9
3.4. Poslední číslice	9
3.5. Mocniny	9
3.6. Faktorizace	9
3.7. Dělitelnost	10
3.8. Prvočíselnost	10
3.9. Pascalův trojúhelník	10
4. Aplikace	11
4.1. Množení králíků	11
4.2. Využití v umění	11
4.3. Výskyt v přírodě	11
5. Historie	12
5.1. Leonardo Bonacci	12
5.2. Další historie	12
6. Závěr	13
7. Přílohy	14
7.1. Tabulky hodnot	14
7.2. Seznam pramenů	16

1. Úvod

Málokterá číselná řada má tak zvláštní a unikátní vlastnosti, jako ta, kterou zde nyní představím. Jedná se o *Fibonacciho posloupnost*. Jako první ji formuloval již ve 13. století právě Leonardo Bonacci, ovšem ten ještě netušil, jak významnou roli bude hrát při vývoji matematiky, a zejména, že se stane snad nejpodivuhodnější posloupností, kterou známe, oplývající úžasným množstvím různých matematických vzorů.

Pozoruhodné jsou nejen její numerické vlastnosti, ale i bezpočet praktických aplikací. Navíc se vyskytuje skrytě v různých formách v celé přírodní říši, a neobyčejně dobře ukazuje, jakým způsobem matematika dokáže popsat skutečný svět a přírodu. Již staří Řekové znali tzv. *zlatý řez*, tedy poměr nejlépe ladící lidskému oku, který je již od antických dob využíván hojně v architektuře, sochařství, výtvarném umění i v četných dalších odvětvích.

V této práci bych vám rád odkryl úžasné tajemství Fibonacciho čísel v celé jeho kráse — rád bych nejdříve popsal základní matematické vlastnosti této řady, věnovat se budu však jejich výskytu v přírodě i praktickému uplatnění. Nezapomenu ani na stručnou historii Fibonacciho čísel.

2. Matematický aparát

2.1. Fibonacciho řada

Italský matematik Leonardo Fibonacci poprvé formuloval definici této řady v zásadě stejně, jak jí známe dnes. Nejobvyklejší je rekurentní zápis:

$$\begin{aligned}F_1 &= 1 \\F_2 &= 1 \\F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, \text{ pro } n \in \mathbb{Z}^+\end{aligned}$$

Ovšem lze použít i alternativní zápis:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\F_1 &= 1 \\F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, \text{ pro } n \in \mathbb{Z}_0^+\end{aligned}$$

Nadále budeme používat druhý zápis, neboť je univerzálnější a bude nám lépe sloužit při odvozování dalších vlastností.

Prvních několik členů posloupnosti je tedy: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...

2.2. Zlatý řez

Zlatý řez, známý již v antice (první písemná zmínka se nachází v Euclidových Elementech, tedy pochází zhruba z třetího století př. n. l.), je jedna z nejvýznamějších aplikací Fibonacciho čísel. Jeho zásadní roli budeme diskutovat později, nyní si ho pouze nadefinujeme. Tradičně se určuje jako kladný kořen kvadratické rovnice

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_+ = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Hodnota zlatého řezu se označuje právě jako ϕ , i když se můžeme setkat i s označením τ . Zlatý řez ϕ je zřejmě algebraické iracionální číslo, jeho přibližná hodnota je $\phi \simeq 1.618033988\dots$. Zavádíme přitom ještě $\varphi = \phi^{-1}$.

Výše uvedenou kvadratickou rovnicí můžeme přepsat i jako

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

poněvadž zřejmě $x \neq 0$. Tedy

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

To znamená, že ϕ je zároveň „nejiracionálnější“ iracionální číslo, je totiž nejobtížnější vyjádřit ho zlomkem racionálních čísel.

Pokud se však podíváme pozorně na Fibonacciho řadu, všimneme si, že s rostoucím n poměr dvou sousedních čísel Fibonacciho řady konverguje k ϕ , tzn. $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$. To si snadno dokážeme:

$$\phi = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

$$\phi = \frac{F_{n-1} + F_n}{F_n}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Ovšem platí i silnější tvrzení, a to

$$\phi^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+k}}{F_n}$$

2.3. Lucasova řada

Francouzský matematik Edouard Lucas definoval alternativní posloupnost čísel, která je až na počáteční hodnoty shodná s Fibonacciho řadou:

$$L_0 = 2$$

$$L_1 = 1$$

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \text{ pro } n \in \mathbb{Z}_0^+$$

Ovšem lze zapsat i:

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

$$L_n = \frac{F_{2n}}{F_n}$$

2.4. Obecné Fibonacciho řady

Na Lucasově řadě jsme si ukázali, že řada vztahů platí i při zvolení jiných počátečních čísel, než 0, 1. Mějme tedy posloupnost $G(a, b)$:

$$G(a, b)_0 = a$$

$$G(a, b)_1 = b$$

$$G(a, b)_{n+2} = G(a, b)_n + G(a, b)_{n+1}$$

Rozepišme si několik prvních členů na součty a a b :

$$G(a, b)_2 = a + b$$

$$G(a, b)_3 = a + 2b$$

$$G(a, b)_4 = 2a + 3b$$

$$G(a, b)_5 = 3a + 5b$$

Jak vidno, připomínají koeficienty u členů a a b také vzájemně posunuté Fibonacciho řady. Dokažme si to:

$$G(a, b)_n = k_{n-1}a + j_{n-1}b$$

$$G(a, b)_{n+1} = k_na + j_nb$$

$$G(a, b)_{n+2} = k_{n+1}a + j_{n+1}b$$

Přitom je zřejmé, že

$$k_{n+1} = (k_{n-1} + k_n)$$

$$j_{n+1} = (j_{n-1} + j_n)$$

Tedy můžeme zapsat:

$$G(a, b)_n = F_{n-1}a + F_n b$$

Poněvadž při důkazu konvergence Fibonacciho řady k ϕ jsme vůbec nepracovali s počátečními hodnotami, můžeme prohlásit, že tento důkaz platí i na obecné Fibonacciho řady, tedy poměr sousedních prvků ve všech řadách, kde n -tý člen je součtem dvou předchozích členů, konverguje k ϕ .

3. Vlastnosti

3.1. Binetův vzorec

Tímto vzorcem lze zjistit libovolný n tý prvek Fibonacciho posloupnosti:

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

Pro obecné posloupnosti pak zřejmě bude platit:

$$G(a, b)_n = \frac{(a\varphi + b)\phi^n + (a\phi - b)(-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

Pro Lucasova čísla pak platí:

$$G(2, 1)_n = \frac{(2\varphi + 1)\phi^n + (2\phi - 1)(-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

$$G(2, 1)_n = \frac{(\frac{2}{\phi} + 1)\phi^n + (2\phi - 1)(-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$G(2, 1)_n = \frac{(\frac{4}{1+\sqrt{5}} + 1)\phi^n + (1 + \sqrt{5} - 1)(-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

$$G(2, 1)_n = \frac{\sqrt{5}\phi^n + \sqrt{5}(-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

tedy

$$L_n = \phi^n + (-\varphi)^n$$

3.2. Součet

Zajímavé vlastnosti má součet prvních n členů posloupnosti:

$$S_n = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$
$$S_n = (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + \dots + (F_{n+2} - F_{n+1})$$

Jak vidíme, pro $(a + b)$ se a z první závorky vykrátí s b z druhé závorky, etc. Zbyde tedy pouze b z první závorky a a z poslední závorky, ergo:

$$S_n = -F_2 + F_{n+2}$$
$$S_n = F_{n+2} - 1$$

3.3. Test členství v řadě

I. Gessel v roce 1972 publikoval překvapivě jednoduché pravidlo, které lze použít při zkoumání, zda je určité n Fibonacciho číslo:

$$\sqrt{5n^2 + 4} \in N \vee \sqrt{5n^2 - 4} \in N$$

3.4. Poslední číslice

Posloupnost posledních číslic Fibonacciho čísel je cyklická a má délku periody 60 prvků. Pro poslední dvě číslice je délka cyklu 300 prvků, pro poslední tři 1500, pro poslední čtyři 15000, atd.

3.5. Mocniny

Pro druhou mocninu Fibonacciova čísla platí

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}$$

(To také dokazuje, že výše uvedená limita opravdu platí, neboť se rozdíl mezi aproximacemi ϕ s rostoucím n zřejmě snižuje, poměr tedy konverguje.)

Zároveň existuje i vztah pro součet mocnin dvou po sobě následujících Fibonacciho čísel:

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

Pro libovolné po sobě jdoucí A, B, C, D pak platí

$$B^2 - C^2 = AD$$

3.6. Faktorizace

Jednoduchým pozorováním zjistíme, že každé $kté$ Fibonacciho číslo je násobek F_k , tedy pro $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \wedge zk \in \mathbb{Z}^+$ platí, že F_{nk} je násobek F_k .

Proto platí, že dva po sobě následující prvky Fibonacciho řady jsou k sobě vzájemně prvočísla, tedy nemají kromě 1 žádný společný prvek ve svém prvočíselném rozkladu.

3.7. Dělitelnost

Pokud chceme zjistit všechna F , dělitelná určitým $d \in \mathbb{N}$, nalezneme nejnižší kladný člen Fibonacciho posloupnosti F_n , dělitelný daným d . Pak platí, že všechna F dělitelná d jsou F_{nk} , kde $k \in \mathbb{N}_0$.

Platí, že každá dvě po sobě jdoucí čísla Fibonacciho posloupnosti jsou nesoudělná.

3.8. Prvočíselnost

Nechť máme $F_n \neq 3$. Pak pokud je F_n prvočíslo, n je také prvočíslo. Např. 13 je prvočíslo, a zároveň platí $F(7) = 13$, tedy 7 je také prvočíslo. Pozor, opačná implikace neplatí!

Předpokládá se, že ve Fibonacciho i Lucasových řadách je nekonečně mnoho prvočísel, zatím se to však nepodařilo dokázat. Zato je poměrně snadné dokázat, že pro $F_n > 2$ neexistuje prvočíselné $F_n + 1$.

3.9. Pascalův trojúhelník

Pokud si Pascalův trojúhelník zapíšeme zarovnaný doleva, tzn. všechny řádky začínají ve stejném sloupečku, součet na k -té diagonále se bude rovnat F_k . Z toho vyplývá, že součet na k -té diagonále se rovná součtu předchozích dvou diagonál, což je velmi užitečná vlastnost zejména v kombinatorice, a má sama o sobě řadu praktických aplikací.

```
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
```

4. Aplikace

- Převody mezi jednotkami (poměr mezi kilometry a mílemi se zhruba rovná ϕ)
- Výpočet $\pi/4$:

$$\arctan \frac{1}{F_{2n}} = \arctan \frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan \frac{1}{F_{2n+2}}$$

4.1. Množení králíků

Původní podnět k vytvoření Fibonacciho sekvence byl popis množení králíků v přírodě.

Králíci jsou schopni rozmnožování už v jednom měsíci, pokud tedy izolujeme jeden pár králíků, za dva měsíce se samici narodí další pár králíků. Pokud předpokládáme, že jsou naši králíci nesmrtelní a samici se vždy každý následující měsíc narodí pár králíků, nabízí se otázka, kolik párů králíků budeme mít za rok? A právě tu si položil Bonacci.

Na konci prvního měsíce máme pouze jeden pár králíků, zatímco na konci druhého měsíce již vlastníme dva páry králíků. Třetí měsíc původní samice porodí třetí pár. Čtvrtý měsíc porodí původní samice i samice z páru, narozeného před dvěma měsíci. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

4.2. Využití v umění

V umění i v přírodě se uplatňuje zejména vlastnost přímo související s Fibonacciho čísly, tedy zlatý řez.

Již staří Egypťané znali zlatý řez (přestože je poprvé písemně zdokumentovaný až Pythagorasem), poznáme to totiž z jejich obrovských pyramid, strany jejichž půdorysu jsou k sobě právě v poměru daném zlatým řezem. I Vergilius vědomě (stejně jako jiní římské básníci té doby) využíval zlatého řezu při kompozici svých básní. Ruský režisér Sergej Michajlovič Ejzenštejn rozstříhal svůj světoznámý film *Křižník Potěmkin* na jednotlivé hlavní části podle hodnoty zlatého řezu.

Téměř všechny Mozartovy sonáty se dělí na dvě části přesně v bodě, určeném zlatým řezem. I v Bachově dílu nalezneme četné výskyty Fibonacciho a Lucasových čísel. Zlatý řez se využívá i při vyřezávání dřev ve tvaru f v houslích.

4.3. Výskyt v přírodě

V přírodě můžeme objevit řadu výskytů zlatého řezu, neboli ϕ , ať už je to rozmístění buněk v meristemu, uspořádání semen v květech a plodech, rozmístění okvětních lístků či spirály v ulitách mořských živočichů. Důvod je neobyčejná efektivnost využití místa, kterou zlatý řez zaručuje díky své „dokonalé“ iracionalitě.

5. Historie

5.1. Leonardo Bonacci

Velký italský matematik Leonardo Bonacci žil cca v letech 1170–1250, předpokládá se, že se narodil i zemřel v Pise. Otazníky obestírají i jeho jméno, používal totiž několik přezdivek. Znáť ho můžeme jako Leonarda z Pisy, Leonarda Bigollo (lze přeložit jako budižkničemu či cestovatel), nebo právě pod příjmením Fibonacci (zkratka z *fillio Bonacci*).

Přestože skutečně byl prvním, kdo Fibonacciho posloupnost popsal, objevil pouze její základní formu, a nedochovaly se nám žádné doklady o hlubším výzkumu (vypadá to, že Fibonacci neznal souvislost s ϕ).

Bonacci hodně cestoval, zejména po arabských zemích, tam se také naučil základy matematiky, a byl jedním z prvních, kdo šířil západní Evropou arabsko-índský číselný systém (v té době byly stále používány římské číslice). Tím se zabýval zejména ve své knize *Libra Abbaci*, koncipované zejména jako příručka pro kupce té doby. Tato kniha nám dává unikátní svědectví o rozsahu matematických znalostí na přelomu tisíciletí v křesťanském světě.

Před Fermatem byl zřejmě v západní Evropě Bonacci největším mužem v teorii čísel, dokázal řadu teorémů z této oblasti a jeho práce položila základy práce řady jeho následníků.

5.2. Další historie

Po smrti Bonacciho byl tento koncept znovuobjeven až Johannesem Keplerem a poté ještě Louisem Lamé. Až Edouard Lucas zdokumentoval Bonacciho prvenství, a zároveň se intenzivně věnoval vlastnostem Fibonacciho čísel (viz také Lucasova čísla). Postaral se také o náležitě zvýraznění této posloupnosti v matematickém světě, proto se již od té doby Fibonacciho čísla zabývala řada dalších významných matematiků.

6. Závěr

Fibonacciho posloupnost a vše s ní související nevytváří žádný vlastní úžasný, avšak abstraktní matematický svět. Pozoruhodnými a často překvapivými souvislostmi popisuje totiž tento matematický aparát náš reálný svět, neočekávané vzory a pravidelnosti v něm, a pomáhá nám tak proniknout až k jeho podstatě. Osobně pokládám tuto část matematiky za jednu z nejzajímavějších — přestože není závratně komplikovaná, je bezpochyby strhující a skrývá jistě ještě mnoho tajemství.

7. Přílohy

7.1. Tabulky hodnot

Fibonacciho posloupnost

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 6765 10946
17711 28657 46368 75025 121393 196418 317811 514229 832040 1346269 2178309
3524578 5702887 9227465 14930352 24157817 39088169 63245986 102334155
165580141 267914296 433494437 701408733 1134903170 1836311903 2971215073
4807526976 7778742049 12586269025 20365011074 32951280099 53316291173
86267571272 139583862445 225851433717 365435296162 591286729879
956722026041 1548008755920 2504730781961 4052739537881 6557470319842
10610209857723 17167680177565 27777890035288 44945570212853 72723460248141
117669030460994 190392490709135 308061521170129 498454011879264
806515533049393 1304969544928657 21114850779780503416454622906707
5527939700884757 8944394323791464 14472334024676221 23416728348467685
37889062373143906 61305790721611591 99194853094755497 160500643816367088
259695496911122585 420196140727489673 679891637638612258
1100087778366101931 1779979416004714189 2880067194370816120
4660046610375530309 7540113804746346429 12200160415121876738
19740274219868223167 31940434634990099905 51680708854858323072
83621143489848422977 135301852344706746049 218922995834555169026
354224848179261915075 573147844013817084101

Lucasova posloupnost

2 1 3 4 7 11 18 29 47 76 123 199 322 521 843 1364 2207 3571 5778 9349
15127 24476 39603 64079 103682 167761 271443 439204 710647 1149851 1860498
3010349 4870847 7881196 12752043 20633239 33385282 54018521 87403803
141422324 228826127 370248451 599074578 969323029 1568397607 2537720636
4106118243 6643838879 10749957122 17393796001 28143753123 45537549124
73681302247 119218851371 192900153618 312119004989 505019158607
817138163596 1322157322203 2139295485799 3461452808002 5600748293801
9062201101803 14662949395604 23725150497407 38388099893011 62113250390418
100501350283429 162614600673847 263115950957276 425730551631123
688846502588399 1114577054219522 1803423556807921 2918000611027443
4721424167835364 7639424778862807 12360848946698171 20000273725560978
32361122672259149 52361396397820127 84722519070079276 137083915467899403
221806434537978679 358890350005878082 580696784543856761
939587134549734843 1520283919093591604 2459871053643326447
3980154972736918051 6440026026380244498 10420180999117162549
16860207025497407047 27280388024614569596 44140595050111976643
71420983074726546239 115561578124838522882 186982561199565069121
302544139324403592003 489526700523968661124 792070839848372253127
1281597540372340914251

1. 618033988749894848204586834365638117720309179805762862135448622705260462
81890244970720720418939113748475408807538689175212663386222353693179318006
07667263544333890865959395829056383226613199282902678806752087668925017116
96207032221043216269548626296313614438149758701220340805887954454749246185
69536486444924104432077134494704956584678850987433944221254487706647809158
84607499887124007652170575179788341662562494075890697040002812104276217711
17778053153171410117046665991466979873176135600670874807101317952368942752
19484353056783002287856997829778347845878228911097625003026961561700250464
33824377648610283831268330372429267526311653392473167111211588186385133162
03840052221657912866752946549068113171599343235973494985090409476213222981
01726107059611645629909816290555208524790352406020172799747175342777592778
62561943208275051312181562855122248093947123414517022373580577278616008688
38295230459264787801788992199027077690389532196819861514378031499741106926
08867429622675756052317277752035361393621076738937645560606059216589466759
55190040055590895022953094231248235521221241544400647034056573479766397239
49499465845788730396230903750339938562102423690251386804145779956981224457
47178034173126453220416397232134044449487302315417676893752103068737880344
17009395440962795589867872320951242689355730970450959568440175551988192180
20640529055189349475926007348522821010881946445442223188913192946896220023
01443770269923007803085261180754519288770502109684249362713592518760777884
66583615023891349333312231053392321362431926372891067050339928226526355620
90297986424727597725655086154875435748264718141451270006023890162077732244
99435308899909501680328112194320481964387675863314798571911397815397807476
15077221175082694586393204565209896985556781410696837288405874610337810544
43909436835835813811311689938555769754841491445341509129540700501947754861
63075422641729394680367319805861833918328599130396072014455950449779212076
12478564591616083705949878600697018940988640076443617093341727091914336501
37157660114803814306262380514321173481510055901345610118007905063814215270
93085880928757034505078081454588199063361298279814117453392731208092897279
22213298064294687824274874017450554067787570832373109759151177629784432847
47908176518097787268416117632503861211291436834376702350371116330725869883
25871033632223810980901211019899176841491751233134015273384383723450093478
60497929459915822012581045982309255287212413704361491020547185549611808764
26576511060545881475604431784798584539731286301625448761148520217064404111
66076695059775783257039511087823082710647893902111569103927683845386333321
56582965977310343603232254574363720412440640888267375843395367959312322134
37320995749889469956564736007295999839128810319742631251797141432012311279
55189477817269141589117799195648125580018455065632952859859100090862180297
75637892599916499464281930222935523466747593269516542140210913630181947227
07890122087287361707348649998156255472811373479871656952748900814438405327
48378137824669174442296349147081570073525457070897726754693438226195468615
33120953357923801460927351021011919021836067509730895752895774681422954339
43854931553396303807

7.2. Seznam pramenů

Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O: Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1989, ISBN 0-201-14236-8

Hofstadter, Douglas R.: Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid, Basic Books, 1979, ISBN 0-465-02656-7

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>

<http://saazava.webpark.cz/Teorie/Fibonacci/Fibonacci.htm>

<http://www.research.att.com/cgi-bin/access.cgi/as/njas/sequences/eisA.cgi?Anum=A000045>

<http://math.holycross.edu/~davids/fibonacci/fibonacci.html>

<http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.pascal.triangle.html>

<http://www.austms.org.au/Modules/Fib/>

<http://www.sdstate.edu/~wsc/http/fibhome.html>

<http://education.lanl.gov/RESOURCES/ATPS/CHPTR02/P011.HTM>

http://www.schoolnet.ca/vp-pv/amof/e_fiboI.htm

© 2003 Petr Baudiš

Může být neomezeně šířeno, ovšem pouze beze změn neodsouhlasených autorem.

Sazba v programu L^AT_EX.