Soukromé gymnázium AD FONTES, o.p.s.

Seminární práce z Matematiky

Fibonacciho čísla

Petr Baudiš
oktáva
18. 12. 2003

Obsah

1. Úvod 3
2. Matematický aparát 4
    2.1. Fibonacciho řada 4
    2.2. Zlatý řez 4
    2.3. Lucasova řada 6
    2.4. Obecné Fibonacciho řady 6
3. Vlastnosti 8
    3.1. Binetův vzorec 8
    3.2. Součet 8
    3.3. Test členství v řadě 9
    3.4. Poslední číslice 9
    3.5. Mocniny 9
    3.6. Faktorizace 9
    3.7. Dělitelnost 10
    3.8. Prvočíselnost 10
    3.9. Pascalův trojúhelník 10
4. Aplikace 11
    4.1. Množení králíků 11
    4.2. Využití v umění 11
    4.3. Výskyt v přírodě 11
5. Historie 12
    5.1. Leonardo Bonacci 12
    5.2. Další historie 12
6. Závěr 13
7. Přílohy 14
    7.1. Tabulky hodnot 14
    7.2. Seznam pramenů 16

1. Úvod

Málokterá číselná řada má tak zvláštní a unikátní vlastnosti, jako ta, kterou zde nyní představím. Jedná se o *Fibonacciho posloupnost*. Jako první ji formuloval již ve 13. století právě Leonardo Bonacci, ovšem ten ještě netušil, jak významnou roli bude hrát při vývoji matematiky, a zejména, že se stane snad nejpodivuhodnější posloupností, kterou známe, oplývajíc úžasným množstvím různých matematických vzorů.

Pozoruhodné jsou nejen její numerické vlastnosti, ale i bezpočet praktických aplikací. Navíc se vyskytuje skrytě v různých formách v celé přírodní říši, a neobyčejně dobře ukazuje, jakým způsobem matematika dokáže popsat skutečný svět a přírodu. Již staří Řekové znali tzv. *zlatý řez*, tedy poměr nejlépe ladící lidskému oku, který je již od antických dob využíván hojně v architektuře, sochařství, výtvarném umění i v četných dalších odvětvích.

V této práci bych vám rád odkryl úžasné tajemství Fibonacciho čísel v celé jeho kráse — rád bych nejdříve popsal základní matematické vlastnosti této řady, věnovat se budu však jejich výskytu v přírodě i praktickému uplatnění. Nezapomenu ani na stručnou historii Fibonacciho čísel.

2. Matematický aparát

2.1. Fibonacciho řada

Italský matematik Leonardo Fibonacci poprvé formuloval definici této řady v zásadě stejně, jak jí známe dnes. Nejobvyklejší je rekurentní zápis:

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ pro } n \in Z^+$$

Ovšem lze použít i alternativní zápis:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ pro } n \in Z_0^+$$

Nadále budeme používat druhý zápis, neboť je univerzálnější a bude nám lépe sloužit při odvozování dalších vlastností.

Prvních několik členů posloupnosti je tedy: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...

2.2. Zlatý řez

Zlatý řez, známý již v antice (první písemná zmínka se nachází v Euclidových Elementech, tedy pochází zhruba z třetího století př. n. l.), je jedna z nejvýznamějších aplikací Fibonacciho čísel. Jeho zásadní roli budeme diskutovat později, nyní si ho pouze nadefinujeme. Tradičně se určuje jako kladný kořen kvadratické rovnice

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_+ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Hodnota zlatého řezu se označuje právě jako ϕ, i když se můžeme setkat i s označením τ. Zlatý řez ϕ je zřejmě algebraické iracionální číslo, jeho přibližná hodnota je $\phi \simeq 1.618033988\ldots$ Zavádíme přitom ještě $\varphi = \phi^{-1}$.

Výše uvedenou kvadratickou rovnici můžeme přepsat i jako

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

poněvadž zřejmě $x \neq 0$. Tedy

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\vdots}}}$$

To znamená, že ϕ je zároveň „nejiracionálnější“ iracionální číslo, je totiž nejobtížnější vyjádřit ho zlomkem racionálních čísel.

Pokud se však podíváme pozorně na Fibonacciho řadu, všimneme si, že s rostoucím n poměr dvou sousedních čísel Fibonacciho řady konverguje k ϕ, tzn. $\phi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$. To si snadno dokážeme:

$$\phi = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

$$\phi = \frac{F_{n-1} + F_n}{F_n}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}}$$

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\vdots}}}$$

Ovšem platí i silnější tvrzení, a to

$$\phi^k = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+k}}{F_n}$$

2.3. Lucasova řada

Francouzský matematik Edouard Lucas definoval alternativní posloupnost čísel, která je až na počáteční hodnoty shodná s Fibonacciho řadou:

$$L_0 = 2$$
$$L_1 = 1$$
$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \text{ pro } n \in Z_0^+$$

Ovšem lze zapsat i:

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

$$L_n = \frac{F_{2n}}{F_n}$$

2.4. Obecné Fibonacciho řady

Na Lucasově řadě jsme si ukázali, že řada vztahů platí i při zvolení jiných počátečních čísel, než $0, 1$. Mějme tedy posloupnost $G(a, b)$:

$$G(a,b)_0 = a$$
$$G(a,b)_1 = b$$
$$G(a,b)_{n+2} = G(a,b)_n + G(a,b)_{n+1}$$

Rozepišme si několik prvních členů na součty a a b:

$$G(a,b)_2 = a + b$$
$$G(a,b)_3 = a + 2b$$
$$G(a,b)_4 = 2a + 3b$$
$$G(a,b)_5 = 3a + 5b$$

Jak vidno, připomínají koeficienty u členů a a b také vzájemně posunuté Fibonacciho řady. Dokažme si to:

$$G(a,b)_n = k_{n-1}a + j_{n-1}b$$
$$G(a,b)_{n+1} = k_n a + j_n b$$
$$G(a,b)_{n+2} = k_{n+1}a + j_{n+1}b$$

Přitom je zřejmé, že

$$k_{n+1} = (k_{n-1} + k_n)$$
$$j_{n+1} = (j_{n-1} + j_n)$$

Tedy můžeme zapsat:

$$G(a, b)_n = F_{n-1}a + F_n b$$

Poněvadž při důkazu konvergence Fibonacciho řady k ϕ jsme vůbec nepracovali s počátečními hodnotami, můžeme prohlásit, že tento důkaz platí i na obecné Fibonacciho řady, tedy poměr sousedních prvků ve všech řadách, kde n-tý člen je součtem dvou předchozích členů, konverguje k ϕ.

3. Vlastnosti

3.1. Binetův vzorec

Tímto vzorcem lze zjistit libovolný $n$tý prvek Fibonacciho posloupnosti:

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

Pro obecné posloupnosti pak zřejmě bude platit:

$$G(a,b)_n = \frac{(a\varphi + b)\phi^n + (a\phi - b)(-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

Pro Lucasova čísla pak platí:

$$G(2,1)_n = \frac{(2\varphi + 1)\phi^n + (2\phi - 1)(-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

$$G(2,1)_n = \frac{(\frac{2}{\phi} + 1)\phi^n + (2\phi - 1)(-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$G(2,1)_n = \frac{(\frac{4}{1+\sqrt{5}} + 1)\phi^n + (1 + \sqrt{5} - 1)(-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

$$G(2,1)_n = \frac{\sqrt{5}\phi^n + \sqrt{5}(-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

tedy

$$L_n = \phi^n + (-\varphi)^n$$

3.2. Součet

Zajímavé vlastnosti má součet prvních n členů posloupnosti:

$$S_n = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$$
$$S_n = (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + \cdots + (F_{n+2} - F_{n+1})$$

Jak vidíme, pro $(a+b)$ se a z první závorky vykrátí s b z druhé závorky, etc. Zbyde tedy pouze b z první závorky a a z poslední závorky, ergo:

$$S_n = -F_2 + F_{n+2}$$
$$S_n = F_{n+2} - 1$$

3.3. Test členství v řadě

I. Gessel v roce 1972 publikoval překvapivě jednoduché pravidlo, které lze použít při zkoumání, zda je určité n Fibonacciho číslo:

$$\sqrt{5n^2+4} \in N \vee \sqrt{5n^2-4} \in N$$

3.4. Poslední číslice

Posloupnost posledních číslic Fibonacciho čísel je cyklická a má délku periody 60 prvků. Pro poslední dvě číslice je délka cyklu 300 prvků, pro poslední tři 1500, pro poslední čtyři 15000, atd.

3.5. Mocniny

Pro druhou mocninu Fibonacciova čísla platí

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}$$

(To také dokazuje, že výše uvedená limita opravdu platí, neboť se rozdíl mezi aproximacemi ϕ s rostoucím n zřejmě snižuje, poměr tedy konverguje.)

Zároveň existuje i vztah pro součet mocnin dvou po sobě následujících Fibonacciho čísel:

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

Pro libovolné po sobě jdoucí A, B, C, D pak platí

$$B^2 - C^2 = AD$$

3.6. Faktorizace

Jednoduchým pozorováním zjistíme, že každé $k$té Fibonacciho číslo je násobek F_k, tedy pro $\forall n \in Z^+ \wedge zk \in Z^+$ platí, že F_{nk} je násobek F_k.

Proto platí, že dva po sobě následující prvky Fibonacciho řady jsou k sobě vzájemně prvočísla, tedy nemají kromě 1 žádný společný prvek ve svém prvočíselném rozkladu.

3.7. Dělitelnost

Pokud chceme zjistit všechna F, dělitelná určitým $d \in N$, nalezneme nejnižší kladný člen Fibonacciho posloupnosti F_n, dělitelný daným d. Pak platí, že všechna F dělitelná d jsou F_{nk}, kde $k \in N_0$.

Platí, že každá dvě po sobě jdoucí čísla Fibonacciho posloupnosti jsou nesoudělná.

3.8. Prvočíselnost

Nechť máme $F_n \neq 3$. Pak pokud je F_n prvočíslo, n je také prvočíslo. Např. 13 je prvočíslo, a zároveň platí $F(7) = 13$, tedy 7 je také prvočíslo. Pozor, opačná implikace neplatí!

Předpokládá se, že ve Fibonacciho i Lucasových řadách je nekonečně mnoho prvočísel, zatím se to však nepodařilo dokázat. Zato je poměrně snadné dokázat, že pro $F_n > 2$ neexistuje prvočíselné $F_n + 1$.

3.9. Pascalův trojúhelník

Pokud si Pascalův trojúhelník zapíšeme zarovnaný doleva, tzn. všechny řádky začínají ve stejném sloupečku, součet na k-té diagonále se bude rovnat F_k. Z toho vyplývá, že součet na k-té diagonále se rovná součtu předchozích dvou diagonál, což je velmi užitečná vlastnost zejména v kombinatorice, a má sama o sobě řadu praktických aplikací.

```
1
1  1
1  2  1
1  3  3   1
1  4  6   4   1
1  5  10  10  5   1
1  6  15  20  15  6  1
```

4. Aplikace

- Převody mezi jednotkami (poměr mezi kilometry a mílemi se zhruba rovná ϕ)
- Výpočet $\pi/4$:

$$\arctan\frac{1}{F_{2n}} = \arctan\frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2n+2}}$$

4.1. Množení králíků

Původní podnět k vytvoření Fibonacciho sekvence byl popis množení králíků v přírodě.

Králíci jsou schopni rozmnožování už v jednom měsíci, pokud tedy izolujeme jeden pár králíků, za dva měsíce se samici narodí další pár králíků. Pokud předpokládáme, že jsou naši králíci nesmrtelní a samici se vždy každý následující měsíc narodí pár králíků, nabízí se otázka, kolik párů králíků budeme mít za rok? A právě tu si položil Bonacci.

Na konci prvního měsíce máme pouze jeden pár králíků, zatímco na konci druhého měsíce již vlastníme dva páry králíků. Třetí měsíc původní samice porodí třetí pár. Čtvrtý měsíc porodí původní samice i samice z páru, narozeného před dvěma měsíci. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$

4.2. Využití v umění

V umění i v přírodě se uplatňuje zejména vlastnost přímo související s Fibonacciho čísly, tedy zlatý řez.

Již staří Egypťané znali zlatý řez (přestože je poprvé písemně zdokumentovaný až Pythagorasem), poznáme to totiž z jejich obrovských pyramid, strany jejichž půdorysu jsou k sobě právě v poměru daném zlatým řezem. I Vergilius vědomě (stejně jako jiní římští básníci té doby) využíval zlatého řezu při kompozici svých básní. Ruský režisér Sergej Michajlovič Ejzenštejn rozstříhal svůj světoznámý film Křižník Potěmkin na jednotlivé hlavní části podle hodnoty zlatého řezu.

Téměř všechny Mozartovy sonáty se dělí na dvě části přesně v bodě, určeném zlatým řezem. I v Bachově dílu nalezneme četné výskyty Fibonacciho a Lucasových čísel. Zlatý řez se využívá i při vyřezávání děr ve tvaru *f* v houslích.

4.3. Výskyt v přírodě

V přírodě můžeme objevit řadu výskytů zlatého řezu, neboli ϕ, ať už je to rozmístění buněk v meristemu, uspořádání semen v květech a plodech, rozmístění okvětních lístků či spirály v ulitách mořských živočichů. Důvod je neobyčejná efektivnost využití místa, kterou zlatý řez zaručuje díky své „dokonalé“ iracionalitě.

5. Historie

5.1. Leonardo Bonacci

Velký italský matematik Leonardo Bonacci žil cca v letech 1170–1250, předpokládá se, že se narodil i zemřel v Pise. Otazníky obestírají i jeho jméno, používal totiž několik přezdívek. Znát ho můžeme jako Leonarda z Pisy, Leonarda Bigollo (lze přeložit jako budižkničemu či cestovatel), nebo právě pod přijímením Fibonacci (zkratka z *fillio Bonacci*).

Přestože skutečně byl prvním, kdo Fibonacciho posloupnost popsal, objevil pouze její základní formu, a nedochovaly se nám žádné doklady o hlubším výzkumu (vypadá to, že Fibonacci neznal souvislost s ϕ).

Bonacci hodně cestoval, zejména po arabských zemích, tam se také naučil základy matematiky, a byl jedním z prvních, kdo šířil západní Evropou arabsko-indský číselný systém (v té době byly stále používány římské číslice). Tím se zabýval zejména ve své knize *Libra Abbaci*, koncipované zejména jako příručka pro kupce té doby. Tato kniha nám dává unikátní svědectví o rozsahu matematických znalostí na přelomu tisíciletí v křesťanském světě.

Před Fermatem byl zřejmě v západní Evropě Bonacci největším mužem v teorii čísel, dokázal řadu teorémů z této oblasti a jeho práce položila základy práce řady jeho následníků.

5.2. Další historie

Po smrti Bonacciho byl tento koncept znovuobjeven až Johannesem Keplerem a poté ještě Louisem Lamé. Až Edouard Lucas zdokumentoval Bonacciho prvenství, a zároveň se intenzivně věnoval vlastnostem Fibonacciho čísel (viz také Lucasova čísla). Postaral se také o náležité zvýraznění této posloupnosti v matematickém světě, proto se již od té doby Fibonacciho čísly zabývala řada dalších významných matematiků.

6. Závěr

Fibonacciho posloupnost a vše s ní související nevytváří žádný vlastní úžasný, avšak abstraktní matematický svět. Pozoruhodnými a často překvapivými souvislostmi popisuje totiž tento matematický aparát náš reálný svět, neočekávané vzory a pravidelnosti v něm, a pomáhá nám tak proniknout až k jeho podstatě. Osobně pokládám tuto část matematiky za jednu z nejzajímavějších — přestože není závratně komplikovaná, je bezpochyby strhující a skrývá jistě ještě mnoho tajemství.

7. Přílohy

7.1. Tabulky hodnot

Fibonacciho posloupnost

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 6765 10946
17711 28657 46368 75025 121393 196418 317811 514229 832040 1346269 2178309
3524578 5702887 9227465 14930352 24157817 39088169 63245986 102334155
165580141 267914296 433494437 701408733 1134903170 1836311903 2971215073
4807526976 7778742049 12586269025 20365011074 32951280099 53316291173
86267571272 139583862445 225851433717 365435296162 591286729879
956722026041 1548008755920 2504730781961 4052739537881 6557470319842
10610209857723 17167680177565 27777890035288 44945570212853 72723460248141
117669030460994 190392490709135 308061521170129 498454011879264
806515533049393 1304969544928657 2111485077978050341645462290 6707
5527939700884757 8944394323791464 14472334024676221 23416728348467685
37889062373143906 61305790721611591 99194853094755497 160500643816367088
259695496911122585 420196140727489673 679891637638612258
1100087778366101931 1779979416004714189 2880067194370816120
4660046610375530309 7540113804746346429 12200160415121876738
19740274219868223167 31940434634990099905 51680708854858323072
83621143489848422977 135301852344706746049 218922995834555169026
354224848179261915075 573147844013817084101

Lucasova posloupnost

2 1 3 4 7 11 18 29 47 76 123 199 322 521 843 1364 2207 3571 5778 9349
15127 24476 39603 64079 103682 167761 271443 439204 710647 1149851 1860498
3010349 4870847 7881196 12752043 20633239 33385282 54018521 87403803
141422324 228826127 370248451 599074578 969323029 1568397607 2537720636
4106118243 6643838879 10749957122 17393796001 28143753123 45537549124
73681302247 119218851371 192900153618 312119004989 505019158607
817138163596 1322157322203 2139295485799 3461452808002 5600748293801
9062201101803 14662949395604 23725150497407 38388099893011 62113250390418
100501350283429 162614600673847 263115950957276 425730551631123
688846502588399 1114577054219522 1803423556807921 2918000611027443
4721424167835364 7639424778862807 12360848946698171 20000273725560978
32361122672259149 52361396397820127 84722519070079276 137083915467899403
221806434537978679 358890350005878082 580696784543856761
939587134549734843 1520283919093591604 2459871053643326447
3980154972736918051 6440026026380244498 10420180999117162549
16860207025497407047 27280388024614569596 44140595050111976643
71420983074726546239 115561578124838522882 186982561199565069121
302544139324403592003 489526700523968661124 792070839848372253127
1281597540372340914251

Číslo ϕ

1.6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052604628189024497072072041893911374847540880753868917521266338622235369317931800607667263544333890865959395829056383226613199282902678806752087668925017116962070322210432162695486262963136144381497587012203408058879544547492461856953648644492410443207713449470495658467885098743394422125448770664780915884607499887124007652170575179788341662562494075890697040002812104276217711177780531531714101170466659914669798731761356006708748071013179523689427521948435305678300228785699782977834784587822891109762500302696156170025046433824377648610283831268330372429267526311653392473167111211588186385133162038400522216579128667529465490681131715993432359734949850904094762132229810172610705961164562990981629055520852479035240602017279974717534277759277862561943208275051312181562855122248093947123414517022373580577278616008688382952304592647878017889921990270776903895321968198615143780314997411069260886742962267575605231727775203536139362107673893764556060605921658946675955190040055590895022953094231248235521221241544400647034056573479766397239494994658457887303962309037503399385621024236902513868041457799569812244574717803417312645322041639723213404444948730231541767689375210306873788034417009395440962795589867872320951242689355730970450959568440175551988192180206405290551893494759260073485228210108819464454422231889131929468962200230144377026992300780308526118075451928877050210968424936271359251876077788466583615023891349333312231053392321362431926372891067050339928226526355620902979864247275977256550861548754357482647181414512700060238901620777322449943530889990950168032811219432048196438767586331479857191139781539780747615077221175082694586393204565209896985556781410696837288405874610337810544439094368358358138113116899385557697548414914453415091295407005019477548616307542264172939468036731980586183391832859913039607201445595044977921207612478564591616083705949878600697018940988640076443617093341727091914336501371576601148038143062623805143211734815100559013456101180079050638142152709308588092875703450507808145458819906336129827981411745339273120809289727922213298064294687824274874017450554067787570832373109759151177629784432847479081765180977872684161176325038612112914368343767023503711163307258698832587103363222381098090121101989917684149175123313401527338438372345009347860497929459915822012581045982309255287212413704361491020547185549611808764265765110605458814756044317847985845397312863016254487611485202170644041116607669505977578325703951108782308271064789390211156910392768384538633332156582965977310343603232254574363720412440640888267375843395367959312322134373209957498894699565647360072959998391288103197426312517971414320123112795518947781726914158911779919564812558001845506563295285985910009086218029775637892599916499464281930222935523466747593269516542140210913630181947227078901220872873617073486499981562554728113734798716569527489008144384053274837813782466917444229634914708157007352545707089772675469343822619546861533120953357923801460927351021011919021836067509730895752895774681422954339438549315533963038 07

7.2. Seznam pramenů

Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O: Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1989, ISBN 0-201-14236-8

Hofstadter, Douglas R.: Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid, Basic Books, 1979, ISBN 0-465-02656-7

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

http://saazava.webpark.cz/Teorie/Fibonacci/Fibonacci.htm

http://www.research.att.com/cgi-bin/access.cgi/as/njas/sequences/eisA.cgi?Anum=A000045

http://math.holycross.edu/ davids/fibonacci/fibonacci.html

http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.pascal.triangle.html

http://www.austms.org.au/Modules/Fib/

http://www.sdstate.edu/ wcsc/http/fibhome.html

http://education.lanl.gov/RESOURCES/ATPS/CHPTR02/P011.HTM

http://www.schoolnet.ca/vp-pv/amof/e_fiboI.htm

© 2003 Petr Baudiš
Může být neomezeně šířeno, ovšem pouze beze změn neodsouhlasených autorem.
Sazba v programu LaTeX.